



## Préparation à l'oral

*Algèbre linéaire et bilinéaire*

Ces exercices sont à **préparer** de sorte à être présentés **clairement** lors des séances en classe entière, selon le planning en ligne. On en profitera pour faire, en classe, les rappels de cours (avec les énoncés complets et précis) correspondants. On se doute bien qu'il n'est pas possible d'être exhaustif en cinq ou six exercices. On s'entraînera aussi sur les sujets individuels des uns et des autres.

### Exercice 1

Référence : R-AL-1

Origine : IMT 2025

Thèmes : Sous-espaces, Symétrie orthogonale

On se place dans l'espace  $\mathbb{R}^4$  et on considère le sous-espace  $F$  défini par les équations :

$$\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ x + y - z + t = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que  $F$  est un plan vectoriel. En déterminer une base.
2. Quelle est la dimension de  $F^\perp$  ? En déterminer une base.
3. Déterminer la matrice, dans la base canonique, de la symétrie orthogonale par rapport à  $F$ .

### Exercice 2

Référence : R-AL-2

Origine : Math II 2025

Thèmes : Réduction de matrice non diagonalisable

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est  $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?
2. Montrer qu'il existe une base  $(v_1, v_2)$  du sous-espace  $G = \ker(f^2 + \text{Id})$  telle que  $f(v_1) = v_2$ .
3. Déterminer une base  $(u_1, u_2, u_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  telle que la matrice de  $f$  dans cette base soit

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. En déduire le calcul  $M^n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### Exercice 3

Référence : R-AL-3

Origine : Math II 2025

Thèmes : Endomorphisme en dimension infinie

Soit  $E = \mathcal{C}^0([-\pi, \pi], \mathbb{R})$  et l'application  $v$  définie sur  $E$  par  $v(f) = g$ , avec :  $\forall x \in [-\pi, \pi], g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x-t)f(t)dt$ .

1. Montrer que  $v$  induit un endomorphisme de  $E$ .
2. Trouver  $\text{Ker}(v)$ ,  $\text{Im}(v)$  et les valeurs propres de  $v$ .

### Exercice 4

Référence : R-AL-4

Origine : Math II 2021

Thèmes : Déterminant

Soit le déterminant  $\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} x + \lambda & y + \lambda & \cdots & y + \lambda \\ z + \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & y + \lambda \\ z + \lambda & \cdots & z + \lambda & x + \lambda \end{vmatrix}$ , où  $(x, y, z, \lambda) \in \mathbb{R}^4$ .

1. Montrer que l'on peut mettre  $\Delta(\lambda)$  sous la forme  $\Delta(\lambda) = a\lambda + b$ .
2. Calculer  $\Delta(0)$  lorsque  $y \neq z$ .
3. Calculer  $\Delta(0)$  lorsque  $y = z$ .

### Exercice 5

Référence : R-AL-5

Origine : Math II 2021

Thèmes : BON, produits scalaires

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension 4 dont note  $(\cdot | \cdot)$  le produit scalaire et soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  une base orthonormée de  $E$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  de trace nulle et  $A$  sa matrice dans la base  $\mathcal{B}$ .

1. Montrer que

$$(u(e_1) | e_1) + (u(e_2) | e_2) + (u(e_3) | e_3) + (u(e_4) | e_4) = 0.$$

2. En déduire qu'il existe  $(i, j) \in \llbracket 1, 4 \rrbracket^2$  tel que  $(u(e_i) | e_i) \geq 0$  et  $(u(e_j) | e_j) \leq 0$ .
3. En considérant la fonction  $f : t \mapsto (u(te_i + (1-t)e_j) | te_i + (1-t)e_j)$ , montrer qu'il existe un vecteur unitaire  $w$  tel que  $(u(w) | w) = 0$ .
4. En déduire l'existence d'une base orthonormée  $\mathcal{B}'$  telle que le coefficient de la première ligne et première colonne de la matrice de  $u$  dans cette base soit nul.
5. Prouver enfin qu'il existe une base orthonormée  $\mathcal{B}''$  telle que les coefficients diagonaux de la matrice de  $u$  dans cette base soient tous nuls.

### Exercice 6

Référence : R-AL-6

Origine : IMT 2023

Thèmes : Distance, projeté orthogonal

Soit  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  muni du produit scalaire défini par :  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ .

On note  $f_0$  et  $f_1$  les fonctions définies sur  $[0, 1]$  par  $f_0(x) = 1$  et  $f_1(x) = x$  et  $F = \text{Vect}(f_0, f_1)$ .

1. Soit  $f$  définie sur  $[0, 1]$  par  $f(x) = x^2$ . Calculer le projeté orthogonal de  $f$  sur  $F$ .
2. Calculer la distance  $d(f, F)$  de  $f$  à  $F$ .