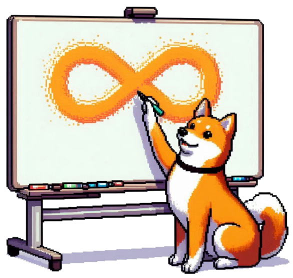
Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Préparation à l'oral

Analyse

Ces exercices sont **à préparer** de sorte à être présentés **clairement** lors des séances en classe entière, selon le planning en ligne. On en profitera pour faire, en classe, les rappels de cours (avec les énoncés complets et précis) correspondants.
On se doute bien qu'il n'est pas possible d'être exhaustif en cinq ou six exercices. On s'entraînera aussi sur les sujets individuels des uns et des autres.

Exercice 1

Référence : R-AN-1

Origine : Math II 2023

Thèmes : Suites numériques, IAF

Pour tout entier $n \geq 2$, on définit

$$P_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}, \qquad \text{et} \qquad G_n(x) = -1 - \ln(1-x) - P_n(x).$$

1. Montrer qu'il existe une unique solution $c \geq 0$ vérifiant $P_2(c) = 0$.

2. Montrer que pour tout $n \geq 2, P_n$ admet une unique racine a_n positive et $a_n \in [0, c]$.

3. Calculer $\sup\limits_{x \in [0,c]} |G_n'(x)|$ et prouver que $|1 + \ln(1 - a_n)| \leq 2c^{n-1}$.

4. Étudier la suite $(a_n)_{n \geq 2}$ (monotonie, convergence et limite).

Exercice 2

Référence : R-AN-2

Origine : Mines-Télécom 2022

Thèmes : Extrema des fonctions de deux variables

Soit f la fonction définie sur $A = [-1, 1]^2$ par $f(x, y) = x^2 y + \ln(1 + y^2)$.

1. Est-ce que f admet un minimum et un maximum sur A ?
2. Étudier les points critiques de f sur $B =]-1, 1[^2$. Déterminer leur nature.
3. Déterminer les extremas de f sur A.

Exercice 3

Référence : R-AN-3

Origine : Math II 2022

Thèmes : Prolongement de régularité, suite d'intégrales sur un segment

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on appelle f_n la fonction définie par $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sin(x)}$.

1. Montrer que f_n se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

2. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} f_n(x)\mathrm{d}x$. Calculer $I_n - I_{n-2}$.

3. En déduire I_n en fonction de n.

Exercice 4

Référence : R-AN-4

Origine : Mines-Télécom 2023

Thèmes : Développement en série entière

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge. On note S sa somme.

2. Déterminer le DSE de la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ et préciser son rayon de convergence.

3. En déduire la valeur de S.

Exercice 5

Référence : R-AN-5

Origine : Math I 2015

Thèmes : Intégrale à paramètre(s)

Pour $\alpha, \beta > 0$, on pose $f_{\alpha,\beta}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+\beta} e^{-xt}\, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que $f_{\alpha,\beta}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que $f_{\alpha,\beta}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
3. Étudier ses variations et ses limites aux bornes.
4. Est-elle $\mathscr{C}^\infty$?

Exercice 6

Référence : R-AN-6

Origine : Math II 2015

Thèmes : Équations différentielles

Soit l'équation différentielle $(E) : x^2y'' + 4xy' + \left(2 - x^2\right) y = 1$.

1. Montrer que (E) possède une unique solution DSE. Préciser son rayon de convergence et exprimer sa somme à l'aide des fonctions usuelles.
2. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ en posant $z = x^2y$.
3. Étudier le recollement en 0.