Mathématiques PT. 2025 - 2026

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

Préparation à l'oral

Géométrie

Ces exercices sont **à préparer** de sorte à être présentés **clairement** lors des séances en classe entière, selon le planning en ligne. On en profitera pour faire, en classe, les rappels de cours (avec les énoncés complets et précis) correspondants.
On se doute bien qu'il n'est pas possible d'être exhaustif en quatre ou cinq exercices. On s'entraînera aussi sur les sujets individuels des uns et des autres.

Exercice 1

Référence : R-G-1

Origine : IMT 2021

Thèmes : Courbe paramétrée, longueur d'arc, Repère de Frénet

Soit $\Gamma : \begin{cases} x(t) = 2\sin(t) - \sin(t)\cos(t) - t \\ y(t) = (1-\cos(t))^2 \end{cases}$ où $t \in [-\pi, \pi]$.

1. Tracer Γ.
2. Déterminer la longueur de Γ.
3. Déterminer le repère de Frenet et la courbure en chaque point de l'arc.

Exercice 2

Référence : R-G-2

Origine : IMT 2015

Thèmes : Coniques, développée

1. Caractériser et tracer la conique $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 - y^2 = 1$.
2. Donner une représentation paramétrique $(x(t), y(t))$ de $\mathcal{C}$ à l'aide des fonctions ch et sh.
3. Déterminer une équation de la famille des normales à $\mathcal{C}$.
4. Déterminer la développée γ de $\mathcal{C}$ et la tracer après l'avoir étudiée.

Exercice 3

Référence : R-G-3

Origine : Math II 2013

Thèmes : Utilisation des complexes en géométrie, Coniques

Soit a un complexe de module 1.

1. Montrer l'équivalence suivante:
$$\left(z = -\bar{a} \text{ ou } z^3 = a\right) \Longleftrightarrow \left(z\bar{z} = 1 \text{ et } z^2 - \bar{z}^2 = a\bar{z} - \bar{a}z\right).$$
2. En déduire que les racines cubiques de a se déduisent graphiquement par l'intersection d'un cercle dont on précisera le centre et le rayon et d'une hyperbole dont on précisera le centre et les asymptotes. Les tracer pour $a = e^{i\pi/4}$.

Exercice 4

Référence : R-G-4

Origine : Math II 2018

Thèmes : Courbes et surfaces (de révolution) de l'espace

On considère la courbe $\mathcal{C}$: $\begin{cases} x &= \alpha\cos(t) \\ y &= \alpha\sin(t) \\ z &= \beta \end{cases}$ où t est un paramètre parcourant $\mathbb{R}$ et α,β deux constantes réelles avec $\alpha > 0$.

1. Identifier la courbe $\mathcal{C}$, en donner les éléments caractéristiques et une équation cartésienne.
2. On considère cette fois la surface $\mathcal{S}$: $\begin{cases} x &= \cos(\theta) \\ y &= \sin(\theta) \\ z &= t \end{cases}$ et la droite D_θ qui passe par les points de $\mathcal{S}$ de paramètre $(\theta, 1)$ et $(\theta+\alpha, 2)$ avec α réel fixé.
   Donner une représentation paramétrique de la droite D_θ.
3. Montrer que l'ensemble de ces droites forme une surface de révolution.
4. Trouver une équation cartésienne de cette surface de révolution.

Exercice 5

Référence : R-G-5

Origine : Math I 2024

Thèmes : Constructions géométriques, courbes planes

Soit un espace affine défini par le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit D la droite des abscisses et D' la droite de vecteur directeur $\vec{\imath}$ et passant par le point $B = (0, 1)$ et soit C le cercle tangent à D en O et à D' en B
Soit $(M_t)_{t\in\mathbb{R}}$ le paramétrage de D' et $(N_t)_{t\in\mathbb{R}}$ l'intersection de (OM_t) et de C.

1. a. Que peut on dire du triangle OBN_t ?
   b. Déterminer les équations cartésiennes de C et de D'
   c. Déterminer les coordonnées de N_t en fonction de t et de même pour le vecteur $\overrightarrow{N_tM_t}$.

2. On définit le point P_t tel que $\overrightarrow{OP_t} = \overrightarrow{N_tM_t}$ avec $P_0 = O$.
   Étudier la courbe décrite par P_t.

Exercice 6

Référence : R-G-6

Origine : Math I 2017

Thèmes : Surfaces réglées, génératrices

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$, f une fonction numérique réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et (S) la surface paramétrée dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ de l'espace par :

$$\begin{cases} x = t^2 - 2t + 1 + mf(t) \\ y = -2t^2 + 4t - 3 - m\left(t^2 - 2t + 1\right) \\ z = 2t - 1 + m \end{cases}, \ t \in I,\ m \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que (S) est une surface réglée.
2. Donner une base du plan tangent à (S) en un point $M(t, m)$ régulier, et justifier que ce plan contient toute la génératrice passant par $M(t, m)$.
3. Montrer que, pour tout $t \in I$, $M(t, 0)$ est régulier.
4. Trouver toutes les fonctions f telles que tous les points d'une même génératrice aient le même plan tangent.