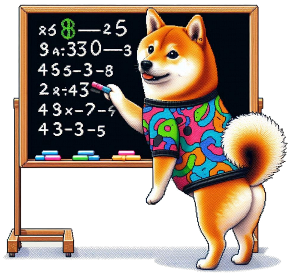
Mathématiques PT. 2025 - 2026

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Préparation à l'oral

Polynômes

Ces exercices sont **à préparer** de sorte à être présentés **clairement** lors des séances en classe entière, selon le planning en ligne. On en profitera pour faire, en classe, les rappels de cours (avec les énoncés complets et précis) correspondants.

Exercice 1

Référence : R-POLY-1

Origine : Math II 2023

Soient p et q des nombres complexes. On cherche $\alpha, \lambda, \beta, \mu$ complexes tels que

$$X^3 + pX + q = \alpha(X+\lambda)^3 + \beta(X+\mu)^3.$$

1. Trouver les relations entre $\alpha, \lambda, \beta, \mu$ et p, q.
2. Exprimer α et β en fonction de λ et μ.
3. En déduire $\lambda + \mu$ et $\lambda\mu$ en fonction de p et q. Peut-on en déduire λ et μ ?
4. Résoudre $z^3 - 3z - \frac{5}{2} = 0$ en utilisant ce qui précède.

Exercice 2

Référence : R-POLY-2

Origine : Math II 2024

1. Soit $P = X^3 - X^2 + 1$. Montrer que P admet une unique racine réelle a.
2. Soit $Q = X^5 + X + 1$. Montrer que P divise Q. Écrire Q comme produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
3. Soit $R = X^5 + X^4 + 1$. Donner une relation entre R et Q. Écrire R comme produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3

Référence : R-POLY-3

Origine : Math II 2017

1. Prouver que $P = (X+i)^7 + (X-i)^7$ est à coefficients réels.
2. Trouver les racines de P.
3. Montrer qu'elles sont réelles et les exprimer à l'aide de fonctions trigonométriques.

Exercice 4

Référence : R-POLY-4

Origine : Math II 2024

Soit $\mathcal{S}_n = \left\{P \in \mathbb{R}[X], \deg(P) = n \text{ et } P(X) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)\right\}$.

1. Soit $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{R}_n[X], a_n \neq 0$. Montrer que :

$$P \in \mathcal{S}_n \iff \forall k \in [0, n], a_k = a_{n-k}.$$

2. Soit $P \in \mathcal{S}_n$ et α une racine réelle de P. Montrer que $\alpha \neq 0$.

3. Soit $\alpha \notin \{-1, 1\}$. Montrer que $n \geq 2$ et qu'il existe $Q \in \mathcal{S}_{n-2}$ tel que

$$P = \left(X^2 - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) X + 1\right) Q$$

4. Montrer que si 1 est une racine de P alors c'est une racine d'ordre pair de P.