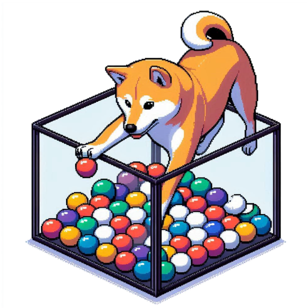
Mathématiques PT. 2025 - 2026

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Préparation à l'oral

Probabilités (& Dénombrement)

Ces exercices sont **à préparer** de sorte à être présentés **clairement** lors des séances en classe entière, selon le planning en ligne. On en profitera pour faire, en classe, les rappels de cours (avec les énoncés complets et précis) correspondants. On se doute bien qu'il n'est pas possible d'être exhaustif en quatre ou cinq exercices...

Exercice 1

Référence : R-P-1

Origine : Mines-Télécom 2019

Thèmes : Dénombrement

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right| \leq \frac{e}{(n+1)!}$. *On rappellera l'inégalité de Taylor-Lagrange.*
2. Soit un alphabet de $n \geqslant 1$ lettres, et M_n le nombre de mots que l'on peut écrire en utilisant une seule fois au plus la même lettre. Montrer $M_n = \lfloor n!e \rfloor$.

Exercice 2

Référence : R-P-2

Origine : Math II 2018

Thèmes : Loi géométrique, loi du min, loi de la différence, théorème de transfert

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On note

$$T = \min(X,Y), \qquad Z = |X - Y|, \qquad \text{et} \qquad Q = \frac{Z}{T}.$$

1. Déterminer la loi de T puis l'espérance de $\frac{1}{T}$.
2. Déterminer la loi puis l'espérance de Z.
3. Déterminer l'espérance de Q.

Exercice 3

Référence : R-P-3

Origine : Mines-Télécom 2025

Thèmes : Suites récurrentes linéaires, Espérance, Variance

Soit X une variable aléatoires à valeurs entières positives telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$3\mathbf{P}(X = n+2) = 4\mathbf{P}(X = n+1) - \mathbf{P}(X = n).$$

Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 4

Référence : R-P-4

Origine : Math II 2023

Thèmes : Loi conditionnelle, loi conjointe

Un pêcheur possède un dé dont il s'aide pour pêcher. Son dé a une probabilité p de tomber sur l'as. Le pêcheur lance le dé autant de fois qu'il faut pour tomber sur l'as, tout en comptant le nombre de lancers nécessaires. On note X la variable aléatoire associée.

1. Trouver la loi de X, son espérance, sa variance. Calculer $P(X > 1)$.
2. Si l'événement $(X = k)$ est réalisé, le pêcheur pêche k quarts d'heure. Il compte le nombre de poissons qu'il pêche pendant ces k quarts d'heure, variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre k. Donner la loi du couple (X, Y).
3. Donner la loi de Y comme somme d'une série que l'on ne cherchera pas à calculer.
4. Calculer $E(Y)$ en admettant le résultat suivant :

   Soit u une application de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{R}^+$.
   Si pour tout entier n, $\sum_k u(k,n)$ converge et si pour tout entier k, $\sum_n u(k,n)$ converge, alors
   $\sum_n \sum_{k=0}^{+\infty} u(k,n)$ *et* $\sum_k \sum_{n=0}^{+\infty} u(k,n)$ *sont convergentes et leurs sommes sont égales.*

Exercice 5

Référence : R-P-5

Origine : Math II 2022

Thèmes : Marche aléatoire approche matricielle

Un homme se trouve dans un train de 4 wagons et se balade de wagon en wagon.
Lorsqu'il se trouve dans un wagon, il ne peut qu'aller dans celui d'avant ou celui d'après. On note le temps $t = n$, l'instant initial étant $t = 0$, et $p_{k,n}$ la probabilité qu'il soit dans le wagon $k \in [\![1, 4]\!]$ à l'instant n.
Le wagon initial dans lequel monte le voyageur est choisi au hasard.

1. Trouver une matrice A telle que $\Pi_{n+1} = A\Pi_n$, avec $\Pi_n = \begin{pmatrix} p_{1,n} \\ p_{2,n} \\ p_{3,n} \\ p_{4,n} \end{pmatrix}$.
2. Exprimer Π_{2n} et Π_{2n+1} en fonction de n. Que peut-on dire lorsque $n \longrightarrow +\infty$?

Question de cours

Origine : Math I 2024

1. Énoncer les inégalités de Markov et de Bienayme-Tchebychev.
2. Les démontrer.