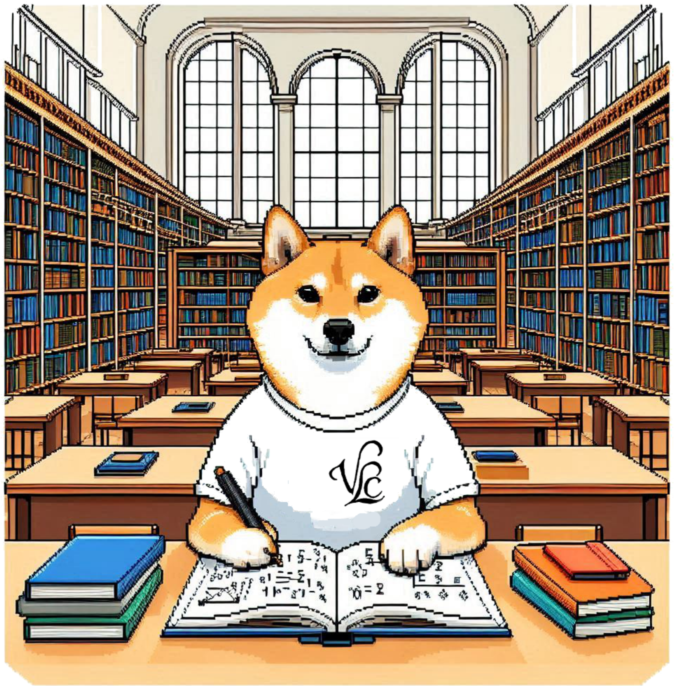
Math PT. 2025 - 2026

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

X Révisions



On propose, comme aide à la révision, une synthèse de toutes les questions et exercices de cours posés en colle tout au long de l'année ainsi qu'un pot pourri d'exercices (posés en colle ou non).

On n'aura pas la naïveté de croire que cette petite sélection fait preuve d'une quelconque exhaustivité ou que la maîtrise des notions suffit, mais c'est une première étape.

On observera que sont également présents quelques maigres exercices d'informatique, qu'on ne négligera pas.

Bon courage à toutes et à tous pour les concours !

1 Questions de cours

1. Trigonométrie : Formules d'addition (**Proposition 3**) et Formules de duplication (**Proposition 4**).

2. Énoncer et démontrer par récurrence la formule du binôme de Newton.

3. Calculer, pour $\theta \in \mathbb{R}$ (en discutant éventuellement selon les valeurs de θ), la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.

4. Exprimer $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.

5. Déterminer la forme algébrique de $z = \dfrac{(1+i)^{2000}}{(i-\sqrt{3})^{1000}}$.

6. `Python`. On définit la suite (S_n) par $S_0 = 0, S_1 = 1, S_{2n} = S_n$ et $S_{2n+1} = S_n + S_{n+1}$.
Écrire une fonction d'en-tête `def L(N) :` qui renvoie la suite des `N` premiers termes de la suite.

7. Factoriser, dans $\mathbb{C}[X]$, $X^4 + 4X^2 + 16$.

8. Suites récurrentes et fonctions contractantes : énoncé **et démonstration** du **Théorème 11** (**Chapitre 0**, page 15). On en profitera pour rappeler l'énoncé de l'inégalité des accroissements finis (**Théorème 1.23**).

9. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ admettant $n \geqslant 2$ racines distinctes. Montrer que f' admet au moins $n-1$ racines distinctes.

10. Étude de la régularité de la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$

11. `Python.` Proposer deux fonctions différentes (dont une des deux récursive) qui permettent de calculer le terme de rang n de la suite (u_n) définie par
$$u_0 = 1, \quad u_1 = 0, \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$
où a et b sont des réels rentrés en argument.

12. Montrer que la fonction $f :\ x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0. Montrer qu'elle n'est pourtant pas de classe $\mathscr{C}^1$ en 0. La courbe de f admet-elle une tangente en 0 ?
Commenter.

13. Énoncé de la formule de Leibniz. Application à la détermination de la dérivée $n-$ième de $f :\ x \mapsto (2x+1)^2 \sin(x)$.

14. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \pm\dfrac{\pi}{2}$.

15. Obtenir le développement limité à l'ordre 3 de la fonction $f :\ t \mapsto (\sin(t)\cos^3(t),\ \sin^2(t))$ en 0 puis, en $\frac{\pi}{2}$.

16. **a.** Montrer que, pour tout $k \in N^*$ avec $k \geq 2$, on a : $\sin^k(x) = o(x),\ x \to 0$.
b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille de vecteurs $\big(x \mapsto \sin(x),\ x \mapsto \sin^2(x), ..., x \mapsto \sin^n(x)\big)$ est libre dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

17. **Algorithmique**. Représenter graphiquement et expliquer le principe de construction de la suite (u_n) permettant d'obtenir une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = 0$ par la méthode de Newton.

18. On considère $F = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x - y + z - t = 0\big\}$ et $G = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x = y\big\}$.
a. Montrer que F, G et $F \cap G$ sont des s.e.v. de $\mathbb{R}^4$. En donner une base et la dimension.
b. Trouver F_1, s.e.v. de F et G_1, s.e.v. de G, tels que $\mathbb{R}^4 = (F \cap G) \oplus F_1 \oplus G_1$.

19. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 2$. Déterminer $\dim(H_1 \cap H_2)$.

20. Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que
$$f \circ f = 0 \iff \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f).$$

Que dire du rang r d'un tel endomorphisme dans le cas où E est de dimension finie n ?

21. Soient E un espace vectoriel et F_1, F_2 deux sous espaces vectoriels supplémentaires dans E. Soit p (resp. q) le projecteur sur F_1 (resp. F_2) parallèlement à F_2 (resp. F_1).
Montrer que $p + q = \mathrm{id}_E$ et que $pq = qp = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

22. Algorithmique. Représenter graphiquement et expliquer le principe de construction de la solution y de l'équation $y' = f(y, t)$ par la méthode d'Euler.

23. Énoncé du théorème du rang. Cas particulier des endomorphismes en dimension finie. On attend une explication de chaque équivalence du **Théorème 2.46**.

24. Point singulier. Définition. Méthode pour déterminer la nature. Classification (avec dessins).

25. Branches infinies. Définition, méthode, nature.

26. Montrer que la courbe Γ paramétrée par $M:\ t \mapsto \left(2t - \dfrac{1}{t^2}, 2t + t^2\right)$ possède un unique point double dont on donnera les coordonnées.

27. Soit M un point du plan d'affixe complexe z.

a. Rappeler l'expression de l'affixe complexe de l'image de M par la rotation r_θ de centre O et d'angle θ.
b. Rappeler l'expression de l'affixe complexe de l'image de M par l'homothétie h_a de centre O et de rapport a avec $a \neq 0$.
c. Vérifier que r_θ et h_a commutent.

28. Algorithmique. Écrire une fonction `nb_lettres(texte)` qui prend en argument une chaîne de caractères `texte` et renvoie un dictionnaire associant à chaque lettre le nombre d'occurrences de celle-ci dans le texte.

29. Étudier et tracer la courbe paramétrée par $M:\ t \mapsto (2\cos(t) - \cos(2t), 2\sin(t) - \sin(2t))$.

30. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, A^n. Que peut-on dire de la formule si $n \in \mathbb{Z}$?

31. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}' = (X^2, X(X-2), (X-2)^2)$ une autre base de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Après un pivot de Gauss simultané, exprimer les coordonnées d'un polynôme $Q = a + bX + cX^2$ dans $\mathcal{B}'$.

32. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et p une projection de E. Montrer que $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

33. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente. On note $p = \min\{k \in \mathbb{N} : A^k = 0\}$. Montrer que $p \leq n$.

34. Déterminer, selon la valeurs de $a \in \mathbb{R}$ et sans calcul, l'image et le noyau de l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

35. On considère la série $\displaystyle\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k\ln(k)}$.
Déterminer la nature de la série ainsi qu'un équivalent, lorsque $n \to +\infty$ de la somme partielle de rang n.

36. Soit $\sum w_n$ une série absolument convergente. Montrer rigoureusement que $\sum w_n^2$ et $\sum \dfrac{w_n}{n}$ sont des séries convergentes.

37. Énoncé du critère de d'Alembert (**Théorème 5.16**).

Application : Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer, en fonction de a et b la nature de la série $\sum \dfrac{b^n (n!)^a}{(2n)!}$.

38. Énoncé du critère spécial des séries alternées (**Théorème 5.9**).

Montrer que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

39. Calculer en mettant en évidence la factorisation le déterminant suivant : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix}$.

40. Déterminer, sur son domaine de définition, une primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2 + 4t + 8}$.

41. Énoncés des Théorèmes de changement de variables et d'intégration par parties pour les intégrales généralisées. (**Théorème 7.23** et **Théorème 7.24**).

42. **a.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \mathrm{d}t$ est convergente.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} \mathrm{d}t = (n+1) \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \mathrm{d}t$.

c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \mathrm{d}t$.

43. Énoncé du Théorème de permutation somme infinie et intégrale (**Théorème 7.32**).

Application. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{d}t}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

44. Déterminer le polynôme caractéristique puis les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

45. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel E de dimension finie et p la projection sur F parallèlement à G. Quel est le polynôme caractéristique de p ?

46. Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ soit diagonalisable / trigonalisable. (**Théorème 8.18** et **Théorème 8.20**).

47. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel E de dimension finie et p la projection sur F parallèlement à G. Quel est le polynôme caractéristique de p ?

48. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

a. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, on a :

$$\lambda \text{ valeur propre de } A + \alpha I \iff \lambda - \alpha \text{ valeur propre de } A.$$

b. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$:

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \Longrightarrow P(\lambda) \text{ valeur propre de } P(A).$$

c. Montrer que, si $P \in \mathbb{K}[X]$ annule A alors

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} : P(\lambda) = 0\}.$$

49. Vrai ou Faux ? Dans chaque cas on justifiera (avec une preuve si c'est vrai, avec un contre-exemple si c'est faux).

a. Toute matrice est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
b. Toute matrice est trigonalisable dans $\mathbb{R}$.
c. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable, alors A^2 aussi.
La réciproque est vraie aussi.
d. La somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable.

50. Énoncés du Théorème de limite monotone pour les suites d'évènements (**Théorème 9.21**), de la formule des probabilités totales (deux versions) (**Théorème 9.20** et **Théorème 9.28**) et de la formule des probabilités composées (**Théorème 9.31**).

51. Dans une population, la probabilité qu'une famille ait n enfants est estimée par la valeur $p_n = \dfrac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$, avec $\lambda \simeq 2$.

- **a.** On note $(A_n)_{n \geq 0}$ la suite d'évènements où A_n est réalisé si et seulement si une famille a n enfants. Vérifier que (A_n) est un système quasi-complet d'évènements.
- **b.** On suppose que les sexes sont équiprobables et qu'il y a indépendance des sexes des enfants à l'intérieur d'une même famille. Calculer de la probabilité qu'une famille ait au moins une fille.

52. Énoncé et démonstration du lemme d'Abel. Définition du rayon de convergence. Dessin explicatif.
Explication des conséquences du lemme sur la détermination du rayon de convergence.

53. Déterminer, en détaillant les précautions prises, le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{\sqrt{n}}{2n+1} z^{2n}$.

54. Énoncé des théorèmes de dérivation et d'intégration terme à terme.

Application. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

55. Développements en série entière usuels (**Section 3.3** page 12).

56. Montrer que $x \mapsto \cos^3(x)$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et expliciter le développement.

57. On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n}$.

- **a.** Déterminer le rayon de convergence de la série et exprimer sa somme f à l'aide de fonctions usuelles.
- **b.** Vérifier que f est solution de l'équation différentielle $y'' + xy' + y = 1$.
- **c.** En déduire l'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y'' + xy' + y = 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

58. Énoncé de la formule d'Al-Kashi (**Proposition 11.3**), de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (**Théorème 11.4**), de l'inégalité triangulaire (**Proposition 11.5**) et du théorème de Pythagore (**Théorèmes 11.7, 11.8**) dans un espace pré-hilbertien réel $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

59. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie sur $\mathbb{R}_n[X]^2$ par

$$(P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a) Q^{(k)}(a)}{(k!)^2}$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
Vérifier que la famille $(P_j)_{0 \leq j \leq n}$ est orthonormée pour ce produit scalaire, où $P_j(X) = (X-a)^j$.

60. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Gram-Schmidt la base (u_1, u_2, u_3) où

$$u_1 = (1, 0, 1), \quad u_2 = (1, 1, 1), \quad u_3 = (-1, -1, 0).$$

61. Soient E un espace pré-hilbertien muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que, si f est représenté, dans une base orthonormée de E, par une matrice symétrique, alors $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont orthogonaux.
Soit p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal de E si et seulement si il est représenté, dans une base orthonormée, par une matrice symétrique.

62. Soient E un espace euclidien et H un hyperplan de E de vecteur normal u. Donner l'expression, en détaillant toutes les étapes, pour tout $x \in E$ de la distance de x à H (en fonction de x et de u).

63. Dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère F le sous-espace vectoriel défini par

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + t = 0 \text{ et } x + y + 2z - t = 0 \right\}.$$

Déterminer le projeté orthogonal de $u = (1, 8, 1, 1)$ sur F.

64. Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle

$$t^2 y' + y = 1.$$

65. Déterminer, en cherchant la solution sous forme d'une fonction développable en série entière, la solution du problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{rcl} y''+xy'+y & = & 1 \\ y(0) & = & 0 \\ y'(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

66. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ (et sur $\mathbb{R}_-^*$) l'équation différentielle

$$t^2y''+4ty'+(2-t^2)y=1$$

en posant $z : t \mapsto t^2y(t)$. Étudier le recollement en 0.

67. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

68. Expliciter, dans la base canonique, la matrice de l'endomorphisme $\psi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$, composé du demi-tour d'axe dirigé par $u=(1,0,1)$ et de l'homothétie de rapport 3.

69. Déterminer les coordonnées et la nature de l'unique point critique de la fonction $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \ln(1+2x^2+y^2)-y$.

70. Résoudre, sur l'ouvert $\mathcal{U}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0\}$, l'équation aux dérivées partielles : $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=\sqrt{x^2+y^2}$ en passant en coordonnées polaires.

71. On considère une parabole $(\mathcal{P})$ de directrice $\mathcal{D}$ et de foyer F.
Soit M un point de $(\mathcal{P})$, H son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$ et $\mathcal{T}$ la tangente à $(\mathcal{P})$ en M.
Faire un dessin, puis montrer que $\mathcal{T}$ est la médiatrice de $[FH]$.

72. Déterminer la nature, les éventuels centres et axes de symétrie et sommets, puis tracer, la conique définie par son équation cartésienne dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

$$(\Gamma): \qquad x^2+xy+y^2-1=0.$$

73. Reproduction du **Tableau de synthèse** (page 9).
Classification des courbes algébriques de degré 2 selon le signe du déterminant de la matrice associée à la partie quadratique.

74. Déterminer la nature, les coordonnées du centre éventuel, l'équation réduite puis le paramétrage dans le repère initial de la conique d'équation

$$9x^2+4y^2-54x+40y+145=0.$$

75. Montrer que la ligne de niveau de $f : (x,y) \longmapsto 2x^2y+2x^2+y^2$ passant par $(1,1)$ admet une tangente en ce point. En donner une équation.

76. On considère la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

a. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

b. Montrer, par récurrence, que f de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

77. Reproduire le **Tableau de synthèse** des lois usuelles en y ajoutant une colonne pour l'expression des fonctions génératrices.

78. Soient $p \in]0,1[$ et $X \sim \mathcal{G}(p)$. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X>k)$.

79. Une urne contient $2n$ boules ($n \in \mathbb{N}^*$) indiscernables au toucher et toutes de couleurs différentes. La moitié d'entre elles sont marquées du chiffre 0 et les autres sont numérotées de 1 à n. On extrait simultanément une *poignée* de n boules de cette urne. On note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule i est dans la poignée et 0 sinon. Quelle est la loi de X_i? Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$. Les évènements $[X_i=1]$ et $[X_j=1]$ sont-ils indépendants ?
Si Z est la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de boules portant le chiffre 0, qu'est-il tentant d'écrire concernant la loi de Z ?

Calculer $\mathbf{E}(X_i)$ puis $\mathbf{E}(Z)$.

80. Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On considère la matrice aléatoire M définie comme suit.
Pour tout $\omega \in \Omega$,

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & X(\omega) & 1 \\ 1 & X(\omega)+Y(\omega) & 0 \\ 0 & Y(\omega) & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la probabilité que M soit inversible.

81. Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires admettant chacune une variance. Montrer que

$$\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

82. Calculer la série génératrice d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

83. Énoncés précis des inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev.
Application. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$ et $\alpha \in]0,1[$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i.$$

Montrer que :

$$\mathbf{P}\left(p \notin \left[\overline{X}_n - \sqrt{\frac{1}{4\alpha n}},\ \overline{X}_n + \sqrt{\frac{1}{4\alpha n}}\right]\right) \leq \alpha.$$

84. Soit $\mathcal{S}$ la surface paramétrée par

$$M : (u,v) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \left\{ \begin{array}{rcl} x(u,v) & = & u+v \\ y(u,v) & = & 4uv \\ z(u,v) & = & u^2+v^2 \end{array} \right.$$

a. Montrer que l'ensemble des points singuliers de ce paramétrage est une courbe **plane** Γ dont on précisera la nature.
b. Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à $\mathcal{S}$ en $M(1,0)$.
c. Montrer que $\mathcal{S}$ est incluse dans une surface $\mathcal{S}'$ dont on donnera une équation cartésienne.

85. Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation cartésienne $2x^2 + y^2 + z^2 = 2$.
a. Montrer que tous les points de $\mathcal{S}$ sont réguliers.
b. Déterminer une équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ au point de coordonnées $(0,1,1)$.

86. Montrer que la surface d'équation $z = x^3 - 3xy$ est réglée.

87. On considère alors la courbe Γ d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + 4y^2 = 4 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Déterminer une équation de la surface de révolution $\mathscr{S}$ obtenue en faisant tourner la courbe Γ autour de l'axe des ordonnées (Oy).

88. Calculer la longueur totale du support de la cardioïde γ paramétrée par

$$M:\ t \mapsto (2\cos(t) - \cos(2t),\ 2\sin(t) - \sin(2t)).$$

89. Définition du repère de Frénet en un point régulier. Formules de Frenet. Définition du rayon de courbure et centre de courbure en un point bi-régulier. Définition et autre mode d'obtention de la développée d'une courbe bi-régulière.

90. Montrer qu'un cercle a un courbure constante égale à l'inverse de son rayon.

2 Exercices

Après s'être assuré de savoir répondre correctement à toutes les questions de cours ci-avant, on pourra s'entraîner sur n'importe lequel de ces exercices. On en choisit un au hasard et on essaie de le faire en 30 minutes maximum (certains sont plus courts).

On encourage aussi à refaire tous les devoirs surveillés de l'année et les devoirs Maison.

Exercice 20.1.

On considère, dans cet exercice, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général $\dfrac{n^n e^{-n}}{n!}$.

1. a. En étudiant les variations de la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(t) = \ln(1+t) - t + \dfrac{t^2}{4}$, montrer:

$$\forall t \in [0,1],\ \ln(1+t) \leqslant t - \frac{t^2}{4}.$$

b. En déduire : $\forall n \geqslant 1,\ \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant \exp\left(1 - \dfrac{1}{4n}\right)$.

2. a. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \exp\left(-\dfrac{1}{4n}\right)$.

b. En considérant le produit $p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k}$, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $u_n \leqslant \exp\left(-1 - \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right)$.

3. a. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\int_1^n \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

b. En déduire : $\forall n \geqslant 1,\ u_n \leqslant \exp\left(-1 - \dfrac{1}{4}\ln(n)\right)$.

c. Quelle est la limite de la suite (u_n)?

Exercice 20.2. — Oral Math II 2023

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, n > 1$, on définit une fonction $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n - x - n$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel $u_n > 1$ tel que $f_n(u_n) = 0$.
2. Soit $a > 1$. Montrer que pour tout entier n assez grand on a $f_n(a) > 0$. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite α.
3. On pose $u_n = \alpha + \varepsilon_n$. Déterminer un équivalent de $u_n - \alpha$.

Exercice 20.3. — Intégrales de Futuna

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $F_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^n(x)}$.

1. a. Montrer l'existence de F_1 et la calculer. *On pourra poser* $u = \mathrm{sh}(x)$.

b. Montrer l'existence de F_2 et la calculer. *On pourra penser à faire apparaître* $\tanh(x)$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F_n est bien convergente et qu'on a : $F_{n+2} = \dfrac{n}{n+1}F_n$.

3. Montrer que $(F_n)_{n\geq 1}$ est positive, décroissante et convergente.

4. Montrer que la suite $(nF_nF_{n+1})_{n\geq 1}$ est constante et calculer sa valeur.

5. Montrer que $F_n \sim F_{n+1}$, $n \to +\infty$. En déduire un équivalent de F_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 20.4. Oral Math II 2019

Soit l'arc paramétré $\gamma : \left\{\begin{array}{l} x(t) = (\sin(t))^2 \\ y(t) = (1+\cos(t))\sin(t) \end{array}\right.$ et $M(t)$ son point de paramètre t.

1. Étudier et tracer l'arc γ. On tracera les tangentes aux points particuliers.

2. On pose $M_1 = M(t)$ et $M_2 = M(t+\pi)$. Montrer que $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ sont orthogonaux.

3. Soit $I(X(t), Y(t))$ le milieu de $[M_1M_2]$.
Donner une représentation paramétrique de la courbe $\mathcal{C}$ décrite par I.

4. Calculer $(X(t) - 1/2)^2 + Y^2(t)$. En déduire la nature de $\mathcal{C}$.

Exercice 20.5.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = (X+1)^{2n} - 1$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire $P_n = XQ_n$, où Q_n est un polynôme dont on précisera le degré, le coefficient dominant et le terme constant.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n n'admet que des racines simples.

3. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les racines complexes de P_n (on les mettra sous forme exponentielle).

4. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

Exercice 20.6. Fonction génératrice d'un couple de VAD

Soient n et m deux entiers supérieurs ou égaux à 2 fixés. On considère deux variables aléatoires X et Y telles que $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ et $Y(\Omega) \subset [\![0, m]\!]$ et le couple $Z = (X, Y)$.
Pour $(i, j) \in [\![0, n]\!] \times [\![0, m]\!]$, on note $p_{i,j} = \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j])$ et on note G_X, G_Y les fonctions génératrices de X et Y et on introduit la fonction G_Z définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$G_Z(x, y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} p_{i,j} x^i y^j.$$

1. Calculer $G_Z(1, 1)$. Exprimer $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{E}(Y)$, $\mathbf{E}(XY)$ et $\operatorname{cov}(X, Y)$ à l'aide des dérivées partielles d'ordres 1 et 2 de G_Z évaluées en $(1, 1)$.

2. On considère une fonction polynomiale $f : (x, y) \longmapsto \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{i,j} x^i y^j$. Montrer que,

$$\left(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = 0\right) \iff \left(\forall (i, j) \in [\![0, n]\!] \times [\![0, m]\!], \quad a_{i,j} = 0\right).$$

3. Déduire de la question précédente que X et Y sont indépendantes si et seulement si, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $G_Z(x, y) = G_X(x)G_Y(y)$.

4. Une urne contient des jetons portant chacun une des trois lettres A, B ou C. La proportion des jetons A (resp. B, C) dans l'urne est égale à $p \in]0, 1[$ (resp. $q, r \in]0, 1[$) avec $p + q + r = 1$. On effectue n tirages (avec $n \in \mathbb{N}^*$) avec remise dans cette urne et on note X (resp. Y) la variable aléatoire correspondant au nombre de jetons A (resp. B) piochés.

a. Déterminer la loi de X et celle de Y puis les expressions de G_X et G_Y.
b. Déterminer la loi de Z puis l'expression de G_Z.
c. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
d. Déterminer $\operatorname{cov}(X, Y)$. Le résultat était-il prévisible ?

Exercice 20.7.

On considère trois variables aléatoires X, Y et Z définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et on suppose que $X^2, Y^2, Z^2, XY, YZ, ZX$ admettent toutes une espérance. On suppose également que

$$\mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y^2) - \mathbf{E}(XY)^2 \neq 0.$$

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$f(x, y) = \mathbf{E}((Z - xX - yY)^2).$$

1. a. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle y admet un unique point critique que l'on notera (x_0, y_0).

b. Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $\mathbf{E}((Z - x_0X - y_0Y)(aX + bY)) = 0$.

c. En déduire l'égalité

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \mathbf{E}\left(((x_0 - x)X + (y_0 - y)Y)^2\right).$$

d. Conclure quant à la présence d'éventuels *extrema*.

e. Que peut-on dire du spectre de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \mathbf{E}(X^2) & \mathbf{E}(XY) \\ \mathbf{E}(XY) & \mathbf{E}(Y^2) \end{pmatrix} \quad ?$$

2. On considère deux variables aléatoires indépendantes X, Y de même loi uniforme $\mathcal{U}([0, 1])$. On pose $Z = X^2$ et on admet que le résultat du cours sur l'espérance du produit de variables aléatoires indépendantes discrètes reste vrai dans le cas de variables aléatoires à densité. Déterminer (x, y) tel que $E((Z - xX - yY)^2)$ soit minimale.

Exercice 20.8. **Lois implosives**

Dans tout l'exercice, on considère une variable aléatoire X à valeurs positives définie sur un certain espace probabilisé, de fonction de répartition F.

On considère également une suite (X_n) de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi que X. On note alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$Y_n = \min(X_1, X_2, ..., X_n).$$

On admet que Y_n est encore une variable aléatoire, définie sur le même espace probabilisé, et on note F_n sa fonction de répartition.

On dit que la loi de X est **implosive** si X n'admet pas d'espérance mais s'il existe un entier $m \geq 2$ tel que Y_m admet une espérance. Auquel cas, on appelle **indice d'implosion** le plus petit entier $m \geq 2$ tel que Y_m admet une espérance.

On suppose que X est une variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}.$$

1. Vérifier que la loi de X est bien une distribution de probabilité.

2. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

3. Expliciter, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $F(k)$.

4. a. Déterminer la loi de Y_2. Admet-elle une espérance?

b. Mêmes questions avec Y_3.

c. La loi de X est-elle implosive? Si oui, quelle est son indice d'implosion?

Exercice 20.9. **Oral Math II 2017**

Soit $\varphi : P \in \mathbb{R}_n[X] \longmapsto \displaystyle\int_X^{X+1} P(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que φ est une application linéaire.

2. Calculer $\varphi\left(X^k\right)$. φ est-il un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?

3. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Est-elle diagonalisable?

4. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X], (\varphi(P))' = \varphi(P')$.

Exercice 20.10. **Oral Math II**

Soient $n \geqslant 2$ un entier et F un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que F est stable par multiplication.
On souhaite montrer que $I_n \in F$. On raisonne par l'absurde en supposant que $I_n \notin F$.

1. Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = F \oplus \operatorname{Vect}(I_n)$.
2. Soit p le projecteur sur $\operatorname{Vect}(I_n)$ parallèlement à F.
   Montrer que, pour toutes matrices M et M', on a $p(MM') = p(M)p(M')$.
3. Montrer que F ne contient pas de matrices inversibles.
4. Montrer que F contient toutes les matrices nilpotentes.
5. Conclure.
   Indication. On pourra commencer par le cas $n = 2$ puis généraliser ensuite.

Exercice 20.11. **Fonction de Bessel**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin\theta) d\theta.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que f est solution de l'équation différentielle

$$xf''(x) + f'(x) + xf(x) = 0.$$

3. Démontrer que f est développable en série entière.

Exercice 20.12. **Oral Math II**

Soit la surface $\mathcal{S}$ d'équation $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{16} = 1$, $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$ et $A(3,0,0)$.

1. Déterminer l'équation du plan $\mathcal{P}_0$ tangent à $\mathcal{S}$ en M_0.
2. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}_0$.
3. On paramètre $\mathcal{S}$ par $(\theta, \phi) \longmapsto (x = 5\sin(\theta), y = 4\cos(\theta)\cos(\phi), z = 4\cos(\theta)\sin(\phi))$.
   a. Écrire H en fonction de θ et de ϕ.
   b. En déduire que H appartient à une sphère indépendante de x_0, y_0, z_0.

Exercice 20.13. **Noyau de Dirichlet - Oral Math I 2025**

1. Montrer que, pour toute fonction h de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, on a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^\pi h(t)\sin(xt)\mathrm{d}t = 0$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$.
3. Montrer que $f : t \mapsto \dfrac{\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.
4. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ ainsi que la valeur de sa somme.

Exercice 20.14. **Spirale Logarithmique**

Soient $\lambda \neq 0$ et la courbe Γ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{ll} x(t) & = \mathrm{e}^{\lambda t}\cos(t) \\ y(t) & = \mathrm{e}^{\lambda t}\sin(t) \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$.

1. Calculer l'abscisse curviligne d'origine 0 de Γ.
2. Déterminer le repère de Frenet en un point $M(t)$ régulier de Γ.
3. Calculer la courbure en un point $M(t)$ régulier de Γ.
4. Calculer et identifier la développée de Γ.

Exercice 20.15.

Déterminer l'ensemble des centres de courbure au point O des courbes intégrales de l'équation différentielle :
$\left(1 - t^2\right)y'' - ty' - 2y = 1$ telles que $y(0) = 0$.