Math PT. 2025 - 2026

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

X

Semaine du 7 Avril : Séances ciblées de révisions

	Mardi 7	**Mercredi 8**	**Jeudi 9**	**Vendredi 10**
08:00 - 10:00	-	-	Équa. diff	Polynômes
10:00 - 12:00	Géom. complexe	-	-	-
14:00 - 16:00	-	Esp. pré-hilb.	Séries numériques	-
16:00 - 18:00	-	-	Séries numériques	-

Chaque séance se déroulera par la résolution des exercices proposés ci-après (qu'il est absolument nécessaire d'avoir préparés) et les rappels de cours correspondants. On pourra arriver avec une liste de questions en lien avec le thème.

1 Mardi 7 Avril : Géométrie complexe

Question de cours. **Banque PT, Math B 2021**

Soit M un point de $\mathbb{R}^2$ d'affixe complexe z.

1. Donner sans justification l'affixe complexe de l'image de M par la rotation r_θ de centre O et d'angle θ.

2. Donner sans justification l'affixe complexe de l'image de M par l'homothétie h_a de centre O et de rapport a avec $a \neq 0$

3. Vérifier que $r_\theta \circ h_a = h_a \circ r_\theta$. On note alors $f_{a,\theta} = r_\theta \circ h_a$.

Exercice 21.1. **Banque PT, Math B 2015**

Soient A, B et C trois points non alignés du plan, et $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC. Soit I un point de la droite (AB) distinct de A et B, et D un point de la droite (IC) vérifiant $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$.

1. Démontrer que D appartient au cercle $\mathcal{C}$.

2. On se place désormais dans le plan complexe. Le vecteur $\vec{u}$ a pour affixe $z \in \mathbb{C}$, et le vecteur $\vec{v}$ a pour affixe $z' \in \mathbb{C}$.
   a. Rappeler la relation entre $\|\vec{u}+\vec{v}\|, \|\vec{u}\|, \|\vec{v}\|$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
   b. En déduire que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \mathcal{R}e\left(z\overline{z'}\right)$ ($\mathcal{R}e$ désigne la partie réelle).

3. Soient A, B, C, D et I les points d'affixes complexes respectives

$$z_A = -3 - i, z_B = 5i, z_C = -1 - 7i, z_D = 14 - 2i \text{ et } z_I = -7 - 9i$$

Démontrer que A, B, C, et D sont *cocycliques* (c'est-à-dire : sur un même cercle).

Exercice 21.2. **Oral Math II 2018**

Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des points M d'affixe $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $\max(|a|, |b|) \leq 1$. Soit encore f l'application qui à un point M de $\mathcal{K}$ d'affixe z associe le point M' d'affixe z^2.

1. Représenter $\mathcal{K}$. Étudier l'existence de centre(s) et axe(s) de symétrie.
2. Soit le segment délimité par les points d'affixe 0 et $1+i$. Déterminer l'image par f de ce segment.
3. Même question avec le segment délimité par 1 et $1+i$.
4. Déterminer l'image par f du triangle dont les sommets admettent pour affixe $0, 1, 1+i$.

Exercice 21.3. **Banque PT, Math B 2018**

L'espace $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère alors la courbe Γ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(\theta) = \theta\cos(\theta) \\ y(\theta) = \theta\sin(\theta) \end{cases}, \theta \in [0; 2\pi].$$

Pour $\theta \in [0; 2\pi]$, on note $M(\theta)$ le point de Γ de paramètre θ.

1. **a**. Donner la forme trigonométrique (ou exponentielle) de l'affixe complexe $z(\theta)$ de $M(\theta)$.
   b. Calculer la dérivée sur $[0; 2\pi]$ de la fonction $\theta \mapsto z(\theta)$.
   c. En déduire la valeur de $\left\|\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}(\theta)\right\|$ pour $\theta \in [0; 2\pi]$ et préciser quels sont les points réguliers de Γ.

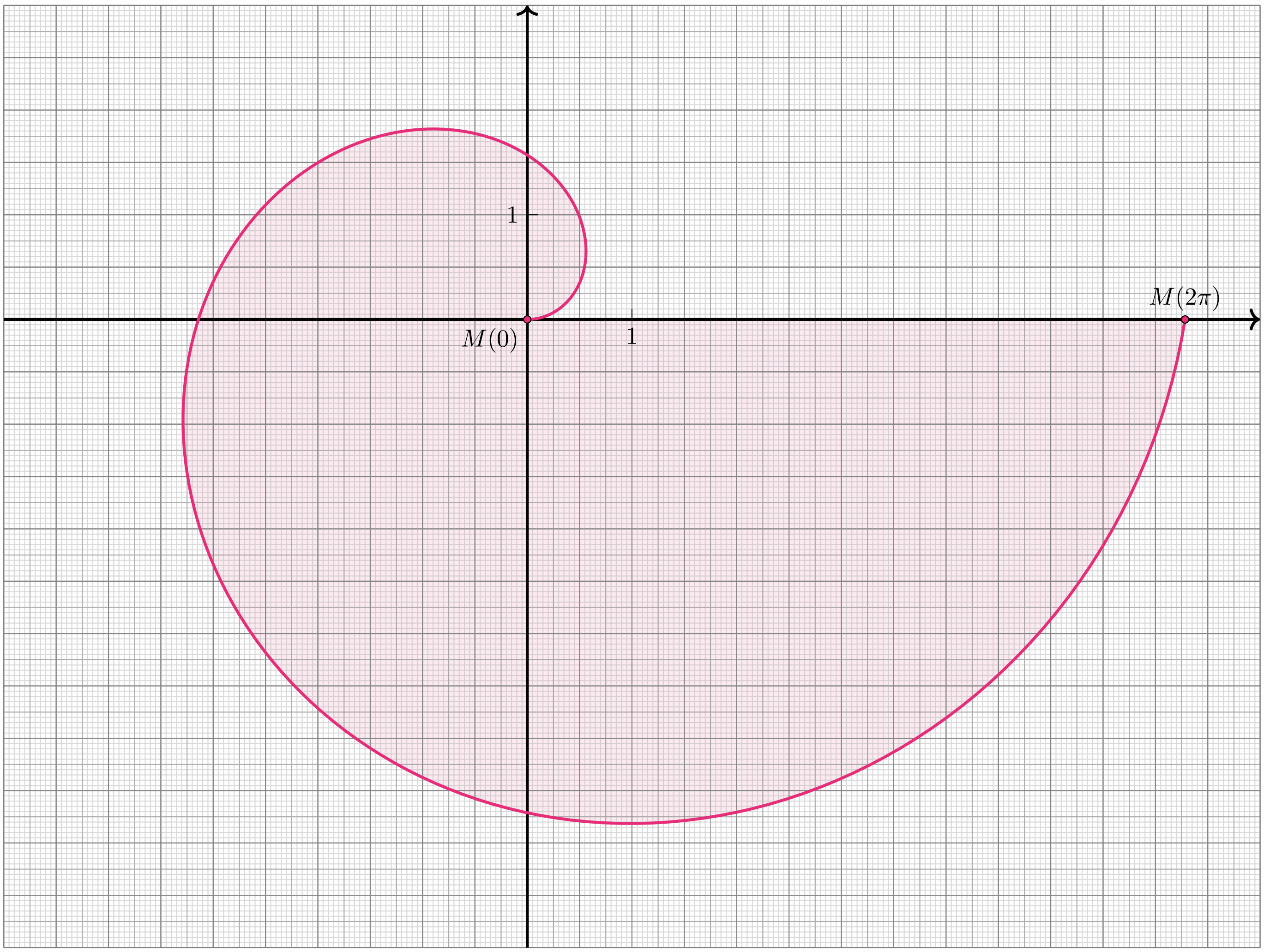
2. On considère la fonction f définie sur $D = [0; 2\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$, par $f(\theta) = \tan(\theta) + \theta$.
   a. Dresser le tableau de variations de f.
   b. Démontrer que f s'annule exactement 3 fois sur D en θ_0, θ_2 et θ_4 vérifiant $\theta_0 < \theta_2 < \theta_4$.
   c. En déduire les points de Γ admettant une tangente horizontale.

On **admet** qu'il existe uniquement 2 points $M(\theta_1)$ et $M(\theta_3)$ de Γ admettant une tangente verticale. On donne

$$\theta_1 \approx 0,86 \text{ et } \cos(\theta_1) \approx 0,65, \quad \theta_2 \approx 2,03 \text{ et } \cos(\theta_2) \approx -0,44, \quad \theta_4 \approx 4,91 \text{ et } \cos(\theta_4) \approx 0,20.$$

3. En utilisant les données ci-dessus, proposer une construction du point $M(\theta_4)$ sachant que l'on dispose uniquement d'une règle graduée, d'un compas et d'une équerre.

Le sujet demandait de tracer avec précision les points $M(\theta)$ pour $\theta = \theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \frac{\pi}{2}$ avec leur tangente ainsi que les points $M(\theta)$ pour $\theta = \pi, \frac{3\pi}{2}$ et 2π avec une unité de 2cm puis de finir le tracé de Γ. On encourage à le faire mais pour des raisons de temps, on propose de passer cette question et on fournit le tracé de Γ ci-dessous.



4. On note Δ la partie du plan délimitée par la courbe Γ et le segment $[M(0)M(2\pi)]$.
L'objectif de cette question est d'en calculer l'aire $\mathcal{A}$.

Pour tout $\theta \in [0; 2\pi]$, on note $\vec{u}(\theta) = \cos(\theta)\vec{\imath} + \sin(\theta)\vec{\jmath}$ et $D(R)$ le disque de centre O et de rayon $R \geqslant 0$.
Soit n un entier naturel non nul. Pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on note $t_k = \dfrac{2k\pi}{n}$.

a. Justifier que l'aire $\mathcal{A}_k(R)$ de la partie $D_k(R)$ de $D(R)$ comprise entre les deux demi-droites d'origine O et dirigées par les vecteurs $\vec{u}(t_k)$ et $\vec{u}(t_{k+1})$ vaut : $\frac{\pi}{n}R^2$.

b. En déduire que l'aire $\mathcal{A}_k$ de la partie Δ_k de Δ comprise entre les deux mêmes demi-droites vérifie :

$$\frac{4\pi^3}{n^3}k^2 \leqslant \mathcal{A}_k \leqslant \frac{4\pi^3}{n^3}(k+1)^2.$$

On pourra remarquer que $D_k(R_1) \subset \Delta_k \subset D_k(R_2)$ pour deux valeurs de R_1 et R_2 bien choisies.

c. Démontrer que pour tout entier naturel N, $\displaystyle\sum_{p=0}^{N} p^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$.

d. En déduire que $\dfrac{2\pi^3}{3n^2}(n-1)(2n-1) \leqslant \mathcal{A} \leqslant \dfrac{2\pi^3}{3n^2}(n+1)(2n+1)$ puis la valeur de $\mathcal{A}$.

2 Mercredi 8 Avril : Espaces pré-hilbertiens

Exercice 21.4. **Banque PT, Math B 2017**

Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on note $\mathcal{B}_{k,n}(X)$ le polynôme

$$\mathcal{B}_{k,n}(X) = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}.$$

On considère la fonction φ définie pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}_2[X]$ par :

$$\varphi(P,Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + \frac{1}{4}\left(4P\left(\frac{1}{2}\right) - P(1) - P(0)\right)\left(4Q\left(\frac{1}{2}\right) - Q(1) - Q(0)\right).$$

1. **a.** Démontrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
   b. Orthonormaliser, pour le produit scalaire φ, la base $\left(X^2, X, 1\right)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
   On exprimera cette nouvelle base orthonormée à l'aide des polynômes $(\mathcal{B}_{k,2}(X))_{0\leqslant k\leqslant 2}$.

2. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base $(\mathcal{B}_{2-k,2}(X))_{0\leqslant k\leqslant 2}$ est :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. **a.** Justifier sans calcul que la matrice M est diagonalisable.

   b. Diagonaliser M. On prendra, si possible, une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de M et on précisera la matrice diagonale D, la matrice de passage Q, son inverse Q^{-1} ainsi que la relation liant ces matrices.

   c. En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

   d. Démontrer que les sous-espaces propres de f sont orthogonaux pour φ.

4. On suppose dans cette question que n est à nouveau quelconque. Démontrer qu'il existe un produit scalaire Ψ sur $\mathbb{R}_n[X]$ pour lequel la base $(\mathcal{B}_{k,n}(X))_{0\leqslant k\leqslant n}$ est orthonormée. On pourra exprimer ce produit scalaire à l'aide des coordonnées des polynômes dans la base $(\mathcal{B}_{k,n}(X))_{0\leqslant k\leqslant n}$.

Exercice 21.5. **Banque PT, Math A 2020**

1. Soit A la matrice définie par

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

   a. Montrer que la matrice A est orthogonale.
   b. *i.* Justifier que A est diagonalisable. Que dire de plus de ses espaces propres?
   ii. Rappeler quelles sont les valeurs propres réelles possibles d'une matrice orthogonale.
   iii. À l'aide des questions précédentes, déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
   c. Caractériser l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.

2. Soit $E = \mathbb{R}^n$ et soit u un endomorphisme de E tel que $u \circ u = \mathrm{Id}$. Nous notons $E_u^+ = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ et $E_u^- = \mathrm{Ker}(u + I\mathrm{Id})$.
   a. Montrer que u est inversible et préciser son inverse.
   b. Pour tout $x \in E$, on pose

$$x_+ = \frac{x + u(x)}{2} \quad \text{et} \quad x_- = \frac{x - u(x)}{2}.$$

   Montrer que $x_+ \in E_u^+$et $x_- \in E_u^-$.
   c. En déduire que $E = E_u^+ \oplus E_u^-$.
   d. Montrer que u est diagonalisable.
   e. Montrer que u est une isométrie si et seulement si $E_u^+ \perp E_u^-$.

3. Soit F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4, x-y-z+t=0, 2x-z-t=0\right\}$$

a. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
b. Vérifier que $\tilde{u}_1=(1,1,1,1)\in F$.
Déterminer une base orthonormale (u_1,u_2) de F où u_1 est un vecteur colinéaire à $\tilde{u}_1$.
c. Vérifier que $\tilde{u}_3=(1,-1,-1,1)\in F^{\perp}$.
Compléter la base précédente en une base orthonormale (u_1,u_2,u_3,u_4) de $\mathbb{R}^4$ en choisissant u_3 colinéaire à $\tilde{u}_3$.
d. On note s la symétrie orthogonale par rapport à F. Écrire la matrice de s dans la base canonique.
e. On appelle réflexion une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.
Écrire la symétrie s comme composée de deux réflexions (on pourra se placer dans une base adaptée à s).

Exercice 21.6. **Oral Math II 2024**

Soit E pré-hilbertien réel et $\mathscr{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ une famille de vecteurs de E unitaires vérifiant:

$$\forall x\in E,\quad \sum_{i=1}^{n}(x\mid e_i)^2=\|x\|^2$$

1. Montrer que $\mathscr{B}$ est une famille orthonormale.
2. En considérant la projection orthogonale sur $F=\operatorname{Vect}(\mathscr{B})$, montrer que $\mathscr{B}$ est une base orthonormale de E.

3 Jeudi 9 Avril : Équations différentielles

Exercice 21.7. **Oral Math II 2024**

Soit l'équation différentielle $(E): xy'+2y=\dfrac{x}{1+x^2}$.

1. Résoudre (E) sur tout intervalle ne contenant pas 0 .
2. Résoudre (E) dans $\mathbb{R}_+$.
3. Existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$?

Exercice 21.8. **Oral Math II 2018**

Soit f continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $(I): \forall x\in\mathbb{R}, f(x)+\displaystyle\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t=1$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$.
2. Exprimer f' puis montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$.
3. Trouver une équation différentielle linéaire d'ordre 2 , notée (E), vérifiée par f.
4. Résoudre (E) puis trouver toutes les solutions de (I).

Exercice 21.9. **Oral Math II 2017**

On pose $f(x)=g\left(\dfrac{1}{x}\right)\dfrac{e^{-1/x}}{x}$, pour tout $x\in]0,+\infty[$, où $g(x)=\displaystyle\int_3^x\frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que : $\forall x>0,\quad g(x)=\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{e^3}{3}+\dfrac{e^x}{x^2}-\dfrac{e^3}{9}+2\displaystyle\int_3^x\frac{e^t}{t^3}\,\mathrm{d}t$.

2. Montrer que :

$$\forall x\geq 3,\qquad \frac{e^x}{x}-\frac{e^3}{3}+\frac{e^x}{x^2}-\frac{e^3}{9}\leq g(x)\leq\frac{e^x}{x}-\frac{e^3}{3}+\frac{e^x}{x^2}-\frac{e^3}{9}+\frac{2(x-3)e^x}{x^3}.$$

3. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 , en posant $f(0)=1$.

4. Montrer que f vérifie l'équation différentielle $(E): x^2y'+(x-1)y=-1$.

5. Chercher les solutions développables en série entière, remarquer que le rayon de convergence est nul, que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ mais n'est pas développable en série entière.

Exercice 21.10. **Oral Math II 2019**

Soit $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{itx}a^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t,\qquad a>1.$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, puis $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée.
2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 .
3. La résoudre. En déduire $f(x)$.

4 Jeudi 9 Avril : (Suites et) Séries numériques

Exercice 21.11. **Oral Math II 2023**

Pour $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x)=\mathrm{e}^{-nx}-x^2$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n et, que $u_n\in]0,1[$.
2. Étudier le sens de variation de (u_n) et sa convergence.
3. Déterminer la limite de nu_n et la nature de $\sum u_n$.

Exercice 21.12. **Oral Math II 2016**

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par :

$$u_{n+1}=\max(v_n,u_n-v_n)\quad\text{et}\quad v_{n+1}=\min(v_n,u_n-v_n),\quad\text{avec } 0<v_0<u_0.$$

1. Calculer $u_{n+1}+v_{n+1}$.
2. Montrer que (u_n) et (v_n) sont décroissantes.
3. Montrer que (v_n) tend vers 0 .
4. En utilisant $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que $\sum v_n^2$ converge et calculer sa somme.
5. La série $\sum v_n$ est-elle convergente?

Exercice 21.13. **Oral Math II 2021**

Pour $\alpha>0$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=\left[n^\alpha\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right]^{n^2}$.

1. Étudier la limite de (u_n) suivant les valeurs de α.
2. Étudier la nature de $\sum u_n$ suivant les valeurs de α.

Exercice 21.14.

On considère, pour $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x)=\dfrac{x}{1+nx^2}$.

1. Étudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}_+$. Donner un équivalent de $f_n(x)$ en $+\infty$ et y préciser la limite de $f_n(x)$.
2. On introduit la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1=1/3$ et, pour $n\in\mathbb{N}^*$, par la relation de récurrence

$$u_{n+1}=f_n(u_n).$$

3. La suite (u_n) correspond-elle au type de suite récurrente habituel ?
4. Calculer u_2 et u_3.
5. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n>0$. En déduire la monotonie de (u_n).
6. Montrer que (u_n) converge vers une limite ℓ que l'on déterminera à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.
7. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$u_n\le\frac{1}{n}.$$

8. En déduite que la suite (nu_n) est croissante, puis qu'elle converge vers un réell $\ell'\in]0;1]$.
9. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n}\le 1.$$

10. Conclure quant à la valeur de ℓ'. En déduire un équivalent de u_n lorsque $n\to+\infty$.

Exercice 21.15. **Oral Math II 2024**

On pose $C_n = \prod_{k=2}^{n} \cos\left(\pi/2^k\right)$ et $S_n = \prod_{k=2}^{n} \sin\left(\pi/2^k\right)$.

1. Prouver la convergence de la suite de terme général $\ln(C_n)$.
2. Trouver une relation entre $C_n \times S_n$ et S_{n-1}.
3. En déduire la limite de C_n.
4. Soit $(w_k)_{k\geq 2}$ définie par $w_{k+1} = (2+w_k)^{1/2}$ et $w_2 \in [1,2]$.
   Montrer que : $\forall k \geq 2, \quad w_k \in [1,2]$.
   En déduire la convergence et la limite de $(w_k)_{k\geq 2}$.

5 Vendredi 10 Avril : Polynômes

Exercice 21.16. **Oral Math II 2024**

Soit un entier $q \geq 2$. On pose $Q(X) = qX^q - \sum_{k=0}^{q-1} X^k \in \mathbb{C}[X]$ et $R = (X-1)Q$.

1. Montrer que 1 est racine de Q.
2. Montrer que si z est racine de Q alors $q|z|^q \leq \sum_{k=0}^{q-1} |z|^k$ et $|z| \leq 1$.
3. Montrer que $R(X) = qX^{q+1} - (q+1)X^q + 1$.
4. Montrer que 1 est racine double de R et que les autres racines de R sont simples.
5. En déduire que Q n'admet que des racines simples.

Exercice 21.17.

1. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ admettant une racine complexe z dont l'ordre de multiplicité est supérieur ou égal à 2.
   - **a.** Vérifier que le conjugué $\bar{z}$ de z est aussi une racine de P.
   - **b.** Démontrer que, si z n'est pas un nombre réel, alors il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que
   $$P = \left(X^2 - 2\operatorname{Re}(z)X + |z|^2\right)^2 Q.$$
   - **c.** En déduire que z est racine du polynôme dérivé P' de P.
2. Pour tout entier $n \geq 2$, on note P_n le polynôme $X^{2n} - 2nX + 1$ de $\mathbb{R}[X]$.
   - **a.** Déterminer les racines complexes du polynôme dérivé P_n'.
   - **b.** Combien le polynôme P_n admet-il de racines complexes?

Pour tout entier $n \geq 2$, on note f_n la fonction réelle définie par:
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^{2n} - 2nx + 1.$$

3. Combien l'équation $f_n(x) = 0$ admet-elle de solutions réelles?
4. On note u_n la plus grande des solutions réelles de l'équation précédente.
   - **a.** Soit $\varepsilon > 0$. Que peut-on dire du signe de $f_n(1+\varepsilon)$? En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ converge vers 1.
   - **b.** Justifier le développement asymptotique
   $$u_n = 1 + \frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

Exercice 21.18. **Polynômes de Tchebychev**

On s'intéresse à la suite de polynômes (T_n), appelés *polynômes de Tchebychev*, définie par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X).$$

1. **a**. Expliciter T_2 et T_3.
b. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le degré de T_n.
c. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(T_0, T_1, ..., T_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$T_n(\cos x) = \cos(nx).$$

3. **a**. Montrer que pour tout couple $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$ est convergente.
On pourra raisonner en traitant séparément le cas où $PQ(1) \neq 0$ et le cas où $PQ(1) = 0$ (même chose en -1).
b. Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \end{array}$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
On notera $\langle ., . \rangle$ ce produit scalaire et $\|.\|$ la norme associée.

c. Montrer que, pour tout couple $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $n \neq m$, on a : $\langle T_n, T_m \rangle = 0$.
On pourra procéder au changement de variable $t = \cos(x)$.

d. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que:

$$\|T_n\|^2 = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{si } n \geqslant 1 \\ \pi, & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

e. En déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire $\langle \ , \ \rangle$.

4. Soit n un entier non nul. On définit d_n la distance de X^n à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ par :

$$\mathrm{d}_n = \inf \{\|X^n - P\| : \ P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}.$$

a. Montrer alors que : $\mathrm{d}_n = \dfrac{|\langle X^n, T_n \rangle|}{\|T_n\|}$.

b. Déterminer en particulier la valeur de d_2.
On commencera par exprimer X^2 en fonction de T_2, T_1 et T_0.