



Devoir Libre n°1

Solution en ligne le 30/09

Exercice 1 - Extrait d'une annale Math C

On considère la fonction $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, telle que :

$$g(0) = 0 \quad , \quad \forall x \in]0, 1] : g(x) = x \ln x$$

1. Étudier la continuité et les variations de la fonction g , puis tracer sa courbe représentative sur $[0, 1]$ sur le papier millimétré joint, en prenant pour unité 10 grands carreaux sur l'axe des abscisses comme sur l'axe des ordonnées.
2. En déduire que $M = \sup_{x \in [0, 1]} |g(x)|$ existe, et donner sa valeur.
3. On définit la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $t_0 \in]\frac{e^{-1}}{3}, e^{-1}[$ et, pour tout entier naturel n :

$$t_{n+1} = -g(t_n).$$

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$t_0 \leq t_n \leq t_{n+1} \leq e^{-1}$$

4. Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange.
5. Montrer que, pour tout réel x de $[t_0, e^{-1}]$:

$$|g(x) - g(e^{-1})| \leq \frac{|x - e^{-1}|^2}{2t_0}$$

6. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n :

$$|t_n - e^{-1}| \leq 2t_0 \left(\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0} \right)^{2^n}$$

7. Quelle est la limite de la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Exercice 2 - Un équivalent par télescope

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}, \quad \text{et} \quad v_n = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right).$$

1. À l'aide d'un développement limité usuel à l'ordre 3, déterminer un réel a tel que

$$v_n \sim \frac{a}{n^2}.$$

2. En déduire la convergence de la série $\sum v_n$ puis l'existence d'une constante $\kappa > 0$ telle que

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n} e^{-n} n^n}{\kappa}.$$

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. À tout polynôme $P = \sum_{k=0}^n p_k X^k$ de E on associe le polynôme

$$f_n(P) = \sum_{k=0}^n p_{n-k} X^k.$$

1. Montrer que f_n est un endomorphisme de E .

2. **Réservé aux 5/2.** Écrire la matrice de f_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. On note :

$$S_n = \{P \in E \mid f_n(P) = P\} \quad \text{et} \quad T_n = \{P \in E \mid f_n(P) = -P\}$$

a. Montrer que S_n et T_n sont supplémentaires dans E .

b. On note $s_n = \dim S_n$ et $t_n = \dim T_n$. Exprimer s_n et t_n en fonction de n .

Exercice 4

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction dérivable. On suppose qu'il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = f(t) \wedge v.$$

1. Montrer que l'ensemble $f(I)$ est inclus dans un plan de $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer que l'ensemble $f(I)$ est inclus dans un cercle.

3. Montrer que l'application $t \mapsto \|f'(t)\|$ est constante.

Exercice 5 - Approfondissement - Développement de $\tan$ en série de Taylor

Cet exercice plus difficile s'adresse à ceux et celles qui maîtrisent déjà bien le reste...

Soient $n \in \mathbb{N}$, $c < d$ deux réels et $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. On rappelle la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(d) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (d-c)^k + \frac{1}{n!} \int_c^d (d-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Soient I un intervalle. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, est dite *absolument monotone* si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in I$, $f^{(n)}(x) \geq 0$.

1. Montrer que, si f, g sont absolument monotones sur I , c'est aussi le cas de $f + g$ et de fg .

2. Soient $R > 0$ et f une fonction absolument monotone sur $[0, R[$. On note, pour $x \in [0, R[$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto \frac{R_n(x)}{x^n}$ est croissante sur $]0, R[$.

b. Montrer que :

$$\forall x \in]0, R[, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x).$$

3. Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\tan^{(n)}$ en fonction de $\tan, \tan', \dots, \tan^{(n-1)}$.

4. En déduire que :

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[, \quad \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

