



Devoir Libre n°1

Solution

Exercice 1 - Extrait d'une annale Math C

Cet exercice est extrait du sujet Mathématiques C, 2014. Il s'agit des sept premières questions de la Partie II.

On renvoie à la **solution** d'Antoine Cristofari (Ajaccio).

On considère la fonction $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, telle que :

$$g(0) = 0 \quad , \quad \forall x \in]0, 1] : g(x) = x \ln x$$

1. Étudier la continuité et les variations de la fonction g , puis tracer sa courbe représentative sur $[0, 1]$ sur le papier millimétré joint, en prenant pour unité 10 grands carreaux sur l'axe des abscisses comme sur l'axe des ordonnées.
2. En déduire que $M = \sup_{x \in [0, 1]} |g(x)|$ existe, et donner sa valeur.
3. On définit la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $t_0 \in]\frac{e^{-1}}{3}, e^{-1}[$ et, pour tout entier naturel n :

$$t_{n+1} = -g(t_n).$$

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$t_0 \leq t_n \leq t_{n+1} \leq e^{-1}$$

4. Énoncer l'**inégalité de Taylor-Lagrange**.

5. Montrer que, pour tout réel x de $[t_0, e^{-1}]$:

$$|g(x) - g(e^{-1})| \leq \frac{|x - e^{-1}|^2}{2t_0}$$

6. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n :

$$|t_n - e^{-1}| \leq 2t_0 \left(\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0} \right)^{2^n}$$

7. Quelle est la limite de la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Exercice 2 - Un équivalent par télescope

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}, \quad \text{et} \quad v_n = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right).$$

1. À l'aide d'un développement limité usuel à l'ordre 3, déterminer un réel a tel que

$$v_n \sim \frac{a}{n^2}.$$

Solution. Rappelons, qu'au voisinage de 0, on a :

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3).$$

Observons ensuite que :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1} e^{-n-1} \sqrt{n+1} n!}{(n+1)! n^n e^{-n} \sqrt{n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n e^{-1} \sqrt{\frac{n+1}{n}} \\ &= \frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1/2} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1/2} \end{aligned}$$

Ainsi, comme $u = 1/n \rightarrow 0$, $n \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} v_n &= \ln(u_n) = \ln\left(\frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1/2}\right) \\ &= -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= -1 + 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

et on peut donc conclure que

$$v_n \sim \frac{1}{12n^2}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

□

2. En déduire la convergence de la série $\sum v_n$ puis l'existence d'une constante $\kappa > 0$ telle que

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n} e^{-n} n^n}{\kappa}.$$

Solution. Par le critère de Riemann, la série $\sum 1/n^2$ converge. Par critère d'équivalence (pour les séries à termes positifs car $v_n \geq 0$), on peut donc affirmer que la série $\sum v_n$ est également convergente. Mais alors, par télescopage,

$$\ln(u_n) - \ln(u_1) = \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) = \sum_{k=1}^{n-1} v_k$$

et

$$u_n = \exp(\ln(u_n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \kappa = \exp\left(\ln(u_1) + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k\right) > 0,$$

ce qui se réécrit

$$\frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!} \times \frac{1}{\kappa} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1,$$

ou encore

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n} e^{-n} n^n}{\kappa}.$$

□

Exercice 3

Cet exercice est extrait des annales de l'Oral Math II, 2025.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. À tout polynôme $P = \sum_{k=0}^n p_k X^k$ de E on associe le polynôme

$$f_n(P) = \sum_{k=0}^n p_{n-k} X^k.$$

1. Montrer que f_n est un endomorphisme de E .

Solution. Il est clair que f_n est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$, au vu de sa définition. Si P, Q deux polynômes tels que

$$P = \sum_{k=0}^n p_k X^k, \quad Q = \sum_{k=0}^n q_k X^k$$

alors, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, le polynôme $\lambda P + Q$ s'écrit

$$\lambda P + Q = \sum_{k=0}^n (\lambda p_k + q_k) X^k = \sum_{k=0}^n r_k X^k$$

avec $r_k = \lambda p_k + q_k$ donc $r_{n-k} = \lambda p_{n-k} + q_{n-k}$ et il suit que

$$f_n(\lambda P + Q) = \sum_{k=0}^n (\lambda p_{n-k} + q_{n-k}) X^k = \lambda \sum_{k=0}^n p_{n-k} X^k + \sum_{k=0}^n q_{n-k} X^k = \lambda f_n(P) + f_n(Q),$$

et f_n est bien linéaire : c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. □

2. **Réservé aux 5/2.** Écrire la matrice de f_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution. On peut réécrire $f_n(X) = \sum_{j=0}^n p_j X^{n-j}$, de sorte que, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f_n(X^k) = X^{n-k}$ ce qui donne la matrice

$$A_n = \text{Mat}(f_n, \mathcal{B}_c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observons que cette matrice est symétrique (réelle) donc diagonalisable. □

3. On note :

$$S_n = \{P \in E \mid f_n(P) = P\} \quad \text{et} \quad T_n = \{P \in E \mid f_n(P) = -P\}$$

a. Montrer que S_n et T_n sont supplémentaires dans E .

Solution. On commence par montrer que la somme est directe, en montrant que l'intersection est réduite à 0. C'est assez clair. Si $f_n(P) = P = -P$ alors $P = 0$.

Observant ensuite que f_n est une symétrie (en effet, pour tout $P \in E$, $f_n^2(P) = P$), on peut écrire, pour tout $P \in E$,

$$P = \frac{1}{2} (P + f_n(P)) + \frac{1}{2} (P - f_n(P)) \in S_n \oplus T_n.$$

□

b. On note $s_n = \dim S_n$ et $t_n = \dim T_n$. Exprimer s_n et t_n en fonction de n .

Solution. On résout.

$$\begin{aligned} P = \sum_{k=0}^n p_k X^k \in S_n &\iff f_n(P) = P \iff \forall k \in \llbracket 0, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \rrbracket, p_k = p_{n-k} \\ &\iff P = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} p_k (X^k + X^{n-k}) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$S_n = \text{Vect} \left(X^k + X^{n-k} : k \in \llbracket 0, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \rrbracket \right).$$

Distinguons deux cas :

✕ Si n est pair (donc $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$ est impair), on a : $\dim(S_n) = \frac{n}{2} + 1$ et $\dim(T_n) = \frac{n}{2}$.

✕ Si n est impair (donc $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$ est pair), on a : $\dim(S_n) = \frac{n+1}{2}$ et $\dim(T_n) = \frac{n+1}{2}$. □

Exercice 4

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction dérivable. On suppose qu'il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = f(t) \wedge v.$$

1. Montrer que l'ensemble $f(I)$ est inclus dans un plan de $\mathbb{R}^3$.

Solution. Notons $v = (a, b, c)$ et considérons naïvement le plan P_0 orthogonal à v (c'est à dire que $u \in P_0 \iff \langle u, v \rangle = 0$) d'équation $ax + by + cz = 0$ car c'est la seule idée qui nous vient pour faire apparaître un plan à partir d'un seul vecteur. La première idée est donc de voir si $f(I)$ ne serait pas inclus dans P_0 ... On introduit donc la fonction $\psi : t \mapsto \langle f(t), v \rangle$. Par hypothèse de dérivabilité de f sur I , c'est aussi le cas de ψ . Pour tout $t \in I$, on a

$$\psi'(t) = \langle f'(t), v \rangle = \langle f(t) \wedge v, v \rangle = \det(f(t), v, v) = 0.$$

Donc ψ est constante sur I . Il existe donc $d \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in I, \quad \langle f(t), v \rangle = d.$$

Or ceci bien est l'équation d'un plan (affine), que l'on note P_d , d'équation $ax + by + cz = d$. On a alors montré que $f(I) \subset P_d$. □

2. Montrer que l'ensemble $f(I)$ est inclus dans un cercle.

Solution. Posons maintenant $\varphi : t \in I \mapsto \|f(t)\|^2$. Comme précédemment, φ est dérivable sur I et, pour $t \in I$, on a :

$$\varphi'(t) = 2\langle f'(t), f(t) \rangle = 2\langle f(t) \wedge v, f(t) \rangle = 0.$$

Ainsi, φ est elle aussi constante. Il existe donc $R \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall t \in I, \quad \|f(t)\|^2 = R,$$

et $f(I)$ est inclus dans l'intersection du plan P_d et de la sphère de centre O et de rayon $\sqrt{R}$.

L'intersection d'un plan et d'une sphère est soit vide, soit réduite à un point (en cas de plan tangent à la sphère) soit un cercle.

Le premier cas n'est clairement pas possible. Dans le second cas, cela voudrait dire que f est constante (mais tout point de l'espace est inclus dans un cercle). □

3. Montrer que l'application $t \mapsto \|f'(t)\|$ est constante.

Solution. On a, pour tout $t \in I$ (d'après la formule $\|u \wedge w\|^2 = \|u\|^2\|w\|^2 - \langle u, w \rangle^2$)

$$\|f'(t)\|^2 = \|f(t) \wedge v\|^2 = \|f(t)\|^2\|v\|^2 - \langle f(t), v \rangle^2 = R\|v\|^2 - d^2,$$

ce qui est bien constant. □

Exercice 5 - Approfondissement - Développement de $\tan$ en série de Taylor

Cet exercice plus difficile s'adresse à ceux et celles qui maîtrisent déjà bien le reste...

Soient $n \in \mathbb{N}$, $c < d$ deux réels et $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. On rappelle la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(d) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (d-c)^k + \frac{1}{n!} \int_c^d (d-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Soient I un intervalle. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, est dite *absolument monotone* si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in I$, $f^{(n)}(x) \geq 0$.

1. Montrer que, si f, g sont absolument monotones sur I , c'est aussi le cas de $f + g$ et de fg .

Solution. Pour $f + g$ c'est évident. soit $x \in I$.

$$(f + g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x) \geq 0.$$

Pour fg on applique la formule de Leibniz

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \geq 0$$

car tous les termes de cette somme sont positifs par hypothèse d'absolue monotonie sur f et g . □

2. Soient $R > 0$ et f une fonction absolument monotone sur $[0, R[$. On note, pour $x \in [0, R[$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto \frac{R_n(x)}{x^n}$ est croissante sur $]0, R[$.

Solution. D'après la formule de Taylor avec reste intégral (FTRI), et par changement de variable $t = ux$,

$$\forall x \in]0, R[, \quad \frac{R_n(x)}{x^n} = \frac{1}{n!x^n} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt = \frac{x}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(ux) du.$$

Or, $f^{(n+1)}$ est croissante car $f^{(n+2)} \geq 0$ (car f est abs. monotone) donc, pour tout $u \in [0, 1]$, $x \mapsto (1-u)^n f^{(n+1)}(ux)$ est croissante sur $]0, R[$ et par croissance de l'intégrale, il en est de même pour $x \mapsto \frac{R_n(x)}{x^n}$ comme produit de fonctions croissantes positives. $\square$

b. Montrer que :

$$\forall x \in]0, R[, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x).$$

Solution. Soit $x \in]0, R[$ et considérons r tel que $x < r < R$. De la question précédente, on tire

$$0 \leq \frac{R_n(x)}{x^n} \leq \frac{R_n(r)}{r^n} \implies 0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{r}\right)^n R_n(r) \leq \left(\frac{x}{r}\right)^n f(r)$$

car toujours par la FTRI et la positivité de l'intégrale, $R_n(x) \geq 0$ et par positivité de tous les coefficients de la somme (car f est abs. monotone), $R_n(r) \leq f(r)$. Cette relation est étendue à $x = 0$. Ainsi la série de Taylor de f converge vers $f(x)$ pour $x \in [0, R[$. $\square$

3. Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\tan^{(n)}$ en fonction de $\tan, \tan', \dots, \tan^{(n-1)}$.

Solution. Comme $\tan' = 1 + \tan^2$, la formule de Leibniz donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \tan^{(n)} = (\tan')^{(n-1)} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-1-k)}.$$

$\square$

4. En déduire que :

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[, \quad \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Solution. Une récurrence forte donne donc $\tan^{(n)}(x) \geq 0$ pour $x \in [0, \pi/2[$ et donc $\tan$ est bien abs. monotone sur l'intervalle elle est donc égale à sa série de Taylor sur $[0, \pi/2[$.

$\tan$ est impaire donc on en déduit immédiatement qu'elle est aussi égale à sa série de Taylor sur $] -\pi/2, 0[$. $\square$