



Devoir Libre n°2

Solution en ligne le 31/10

Exercice 1 - Noyaux itérés, Classique de chez classique

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et k un entier naturel. On pose

$$N_k = \text{Ker}(f^k) \text{ et } I_k = \text{Im}(f^k).$$

1. Montrer que $N_k \subset N_{k+1}$ et que si $N_k = N_{k+1}$, alors $N_{k+1} = N_{k+2}$.
2. Montrer qu'il existe k tel que $N_k = N_{k+1}$. Indication : utiliser la suite des dimensions des N_k .
3. Soit p le plus petit entier tel que $N_p = N_{p+1}$. Montrer que $E = N_p \oplus I_p$.

Exercice 2 - Une annale de Math B

Dans cet exercice, l'espace $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère alors la courbe Γ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(\theta) = \theta \cos(\theta) \\ y(\theta) = \theta \sin(\theta) \end{cases}, \theta \in [0; 2\pi].$$

Pour $\theta \in [0; 2\pi]$, on note $M(\theta)$ le point de Γ de paramètre θ .

1.
 - a. Donner la forme trigonométrique (ou exponentielle) de l'affixe complexe $z(\theta)$ de $M(\theta)$.
 - b. Calculer la dérivée sur $[0; 2\pi]$ de la fonction $\theta \mapsto z(\theta)$.
 - c. En déduire la valeur de $\left\| \frac{d\vec{OM}}{d\theta}(\theta) \right\|$ pour $\theta \in [0; 2\pi]$ et préciser quels sont les points réguliers de Γ .
2. On considère la fonction f définie sur $D = [0; 2\pi] - \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\}$, par $f(\theta) = \tan(\theta) + \theta$.
 - a. Dresser le tableau de variations de f .
 - b. Démontrer que f s'annule exactement 3 fois sur D en θ_0, θ_2 et θ_4 vérifiant $\theta_0 < \theta_2 < \theta_4$.
 - c. En déduire les points de Γ admettant une tangente horizontale. On admet qu'il existe uniquement 2 points $M(\theta_1)$ et $M(\theta_3)$ de Γ admettant une tangente verticale.

3. Tracé de Γ . On donne :

$$\begin{aligned} \theta_1 &\approx 0,86 \text{ et } \cos(\theta_1) \approx 0,65, & \theta_2 &\approx 2,03 \text{ et } \cos(\theta_2) \approx -0,44, \\ \theta_3 &\approx 3,43 \text{ et } \cos(\theta_3) \approx -0,96, & \theta_4 &\approx 4,91 \text{ et } \cos(\theta_4) \approx 0,20. \end{aligned}$$

- a. En utilisant les données ci-dessus, proposer une construction du point $M(\theta_4)$ sachant que l'on dispose uniquement d'une règle graduée, d'un compas et d'une équerre.
- b. Sur la feuille de papier millimétré fournie avec le sujet, placer avec précision les points $M(\theta)$ pour $\theta = \theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \frac{\pi}{2}$ avec leur tangente ainsi que les points $M(\theta)$ pour $\theta = \pi, \frac{3\pi}{2}$ et 2π . Il est conseillé de prendre une unité de grands carreaux.
- c. Finir le tracé de Γ et placer le point $M\left(\frac{4\pi}{3}\right)$.

Exercice 3 - Oral Math II 2025

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Réservé aux** 5/2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
2. Montrer qu'il existe une base (v_1, v_2) du sous-espace $G = \ker(f^2 + \text{Id})$ telle que $f(v_1) = v_2$.
3. Déterminer une base (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f dans cette base soit

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. En déduire le calcul M^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4 - Oral Math II 2021 - Cercle tangent à une parabole et passant par son foyer

Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$.

On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des centres des cercles tangents à $\mathcal{P}$ et passant par le point $F(p/2, 0)$. Soit $A(a, b)$ un point de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{N}$ la normale en ce point. On note I le centre du cercle passant par F et tangent à $\mathcal{P}$ en A .

1. Donner un paramétrage de $\mathcal{P}$.
2. Montrer que tout point de $\mathcal{N}$ a des coordonnées de la forme $(a - \lambda p, b(1 + \lambda))$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer les coordonnées de I .
4. Étudier et tracer la courbe paramétrée, lieu des points I , dans le cas où $p = 1$.

Exercice 5 - Jeu du chaos

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé. Chaque point du plan est caractérisé par une liste de deux réels du type $[x, y]$.

On rappelle que, si C est un point et r un réel, l'image M' du point M par l'homothétie de centre C et de rapport r est l'unique point M' tel que :

$$\overrightarrow{CM'} = r \overrightarrow{CM}.$$

1. Écrire une fonction `H` de trois arguments, un point C , une valeur réelle r et un point M qui renvoie l'image de M par l'homothétie de centre C et de rapport r .

On se donne m homothéties du plan de centres C_i et de rapports $r_i \in]0, 1[$.

On appelle *jeu du chaos* la suite de points $(M_k)_{k \geq 0}$ construite de la manière suivante :

- ✕ le point M_0 est donné ;
- ✕ pour tout $k \geq 0$, on pose $M_{k+1} = H(C_i, r_i, M_k)$ où i est tiré au sort à chaque itération avec une loi équiprobable. Avec `Python`, on pourra utiliser la fonction `randint` de la bibliothèque `random`.

2. Écrire une fonction `tirer` de quatre arguments, la liste des centres des homothéties, la liste des rapports des homothéties, le point M_0 et le nombre n d'itérations qui renvoie la liste des $n + 1$ premiers points de la suite.
3. Tracer les 5001 premiers points de la suite définie par les trois homothéties de rapports 0.5 et de centres trois sommets d'un triangle équilatéral et de premier point l'un de ces sommets.
4. Définir une fonction `T` de trois arguments m , r et n qui trace les $n + 1$ premiers points de la suite obtenue pour un jeu d'homothéties de même rapport r et dont les centres sont les sommets d'un polynôme régulier à m côtés et de premier point l'un de ces sommets.
Tester `T(5, 0.37, 10000)`.

