



Devoir Libre n°2

Solution

Exercice 1 - Noyaux itérés, Classique de chez classique

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et k un entier naturel. On pose

$$N_k = \text{Ker}(f^k) \text{ et } I_k = \text{Im}(f^k).$$

1. Montrer que $N_k \subset N_{k+1}$ et que si $N_k = N_{k+1}$, alors $N_{k+1} = N_{k+2}$.

Solution. Par définition des N_k , on a $N_k = \text{ker}(f^k)$ et $N_{k+1} = \text{ker}(f^{k+1})$.

Si $x \in N_k$, alors $f^k(x) = 0$, donc,

$$f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0) = 0$$

ce qui implique que $x \in N_{k+1}$. Ainsi, $N_k \subset N_{k+1}$.

Supposons maintenant que $N_k = N_{k+1}$. Comme $N_{k+1} \subset N_{k+2}$, il suffit démontrer l'inclusion $N_{k+2} \subset N_{k+1}$ pour conclure. Soit $x \in N_{k+2}$; on a $f^{k+2}(x) = 0$, c-à-d. $f^{k+1}(f(x)) = 0$, donc $f(x) \in N_{k+1} = N_k$; on en déduit que $f^k(f(x)) = 0$, soit $f^{k+1}(x) = 0$; autrement dit : $x \in N_{k+1}$, ce qui conclut. $\square$

2. Montrer qu'il existe k tel que $N_k = N_{k+1}$. Indication : utiliser la suite des dimensions des N_k .

Solution. La suite $(\dim N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite d'entiers croissante et bornée par $n = \dim E$. Donc, elle est stationnaire à partir d'un certain rang. Il existe donc un entier k tel que $\dim N_k = \dim N_{k+1}$. Comme $N_k \subset N_{k+1}$, on a $N_k = N_{k+1}$. Notons que ceci entraîne, compte tenu du résultat de la Question 1., que $N_k = N_j$ pour tout $j \geq k$. $\square$

3. Soit p le plus petit entier tel que $N_p = N_{p+1}$. Montrer que $E = N_p \oplus I_p$.

Solution. Soit p le plus petit entier tel que $N_p = N_{p+1}$. Montrons que $E = N_p \oplus I_p$. D'après le théorème du rang,

$$\dim N_p + \dim I_p = n$$

Il suffit donc d'établir que $N_p \cap I_p = \{0\}$ pour conclure. Soit $x \in N_p \cap I_p$. Alors, $x \in N_p$ et $x \in I_p$. Donc, $f^p(x) = 0$ et il existe $y \in E$ tel que $x = f^p(y)$. On a alors :

$$f^p(x) = f^p(f^p(y)) = f^{2p}(y) = 0.$$

Donc $y \in N_{2p} = N_p$, d'où $f^p(y) = 0$, ce qui signifie que $x = f^p(y) = 0$. Ainsi, $N_p \cap I_p = \{0\}$. Par conséquent,

$$E = N_p \oplus I_p.$$

$\square$

Exercice 2 - Une annale de Math B

Cet exercice est extrait du sujet Mathématiques B, 2018.

Dans cet exercice, l'espace $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère alors la courbe Γ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(\theta) = \theta \cos(\theta) \\ y(\theta) = \theta \sin(\theta) \end{cases}, \theta \in [0; 2\pi].$$

Pour $\theta \in [0; 2\pi]$, on note $M(\theta)$ le point de Γ de paramètre θ .

1. a. Donner la forme trigonométrique (ou exponentielle) de l'affixe complexe $z(\theta)$ de $M(\theta)$.

Solution. Par définition, on a, pour tout $\theta \in [0; 2\pi]$, $z(\theta) = x(\theta) + i \sin(\theta) = \theta \cos(\theta) + i\theta \sin(\theta) = \theta e^{i\theta}$. □

- b. Calculer la dérivée sur $[0; 2\pi]$ de la fonction $\theta \mapsto z(\theta)$.

Solution. La fonction $z : \theta \mapsto z(\theta)$ est dérivable comme produit de fonctions usuelles dérivables (à valeurs dans $\mathbb{C}$). Pour tout $\theta \in [0; 2\pi]$, on a

$$z'(\theta) = (1 + i\theta)e^{i\theta}.$$

□

- c. En déduire la valeur de $\left\| \frac{d\vec{OM}}{d\theta}(\theta) \right\|$ pour $\theta \in [0; 2\pi]$ et préciser quels sont les points réguliers de Γ .

Solution. C'est un calcul sans difficulté. Pour $\theta \in [0; 2\pi]$, on a

$$\left\| \frac{d\vec{OM}}{d\theta}(\theta) \right\|^2 = |z'(\theta)|^2 = |1 + i\theta|^2 = 1 + \theta^2 \geq 1 > 0.$$

Ainsi, pour tout $\theta \in [0; 2\pi]$, $\frac{d\vec{OM}}{d\theta}(\theta) \neq \vec{0}$, ce qui implique que tous les points sont réguliers. □

2. On considère la fonction f définie sur $D = [0; 2\pi] - \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\}$, par $f(\theta) = \tan(\theta) + \theta$.

- a. Dresser le tableau de variations de f .

Solution. La fonction $\tan$ est définie et dérivable sur $D = \left[0, \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[$ et il en est de même pour f . Pour tout $\theta \in D$, on

$$f'(\theta) = \tan'(\theta) + 1 = 2 + \tan^2(\theta) > 0.$$

Ainsi, f est strictement croissante sur chacun des intervalles qui constituent D . Les limites de $\tan$ donnent les limites aux valeurs interdites. On a le tableau suivant :

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
f	0	$+\infty$	$+\infty$	2π
		$-\infty$	$-\infty$	

□

- b. Démontrer que f s'annule exactement 3 fois sur D en θ_0, θ_2 et θ_4 vérifiant $\theta_0 < \theta_2 < \theta_4$.

Solution. On note I_0, I_1 et I_2 les trois intervalles qui constituent D . On applique le théorème de la bijection monotone à la restriction de f sur chacun de ces intervalles. Comme f est continue et strictement croissante sur I_1 (resp. I_1 , resp. I_2), sa restriction sur l'intervalle réalise une bijection de I_1 (resp. I_1 , resp. I_2) sur $[0, +\infty[$, (resp. $\mathbb{R}$, resp. $] - \infty, 2\pi]$.

Comme 0 est élément de chacun de ces trois intervalles images, 0 admet un unique antécédent par f dans chacun des trois intervalles que l'on notera θ_0, θ_2 et θ_4 avec $\theta_0 < \theta_2 < \theta_4$. Comme, de plus, $f(0) = 0$, on sait que $\theta_0 = 0$. □

- c. En déduire les points de Γ admettant une tangente horizontale. On admet qu'il existe uniquement 2 points $M(\theta_1)$ et $M(\theta_3)$ de Γ admettant une tangente verticale.

Solution. On sait que $M(\theta)$ étant régulier, la courbe γ admet une tangente horizontale si et seulement si $y'(\theta) = 0$.

Or, pour $\theta \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$, on peut écrire $y'(\theta) = \theta \cos(\theta) + \sin(\theta) = \cos(\theta)f(\theta)$. Ainsi

$$\begin{aligned} y'(\theta) = 0 &\iff \theta \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\} \quad \text{ou} \quad f(\theta) = 0 \\ &\iff \theta \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \theta_3, \frac{3\pi}{2}, \theta_4\right\} \end{aligned}$$

□

3. Tracé de Γ . On donne :

$$\begin{aligned} \theta_1 \approx 0,86 \text{ et } \cos(\theta_1) \approx 0,65, & \quad \theta_2 \approx 2,03 \text{ et } \cos(\theta_2) \approx -0,44, \\ \theta_3 \approx 3,43 \text{ et } \cos(\theta_3) \approx -0,96, & \quad \theta_4 \approx 4,91 \text{ et } \cos(\theta_4) \approx 0,20. \end{aligned}$$

- a. En utilisant les données ci-dessus, proposer une construction du point $M(\theta_4)$ sachant que l'on dispose uniquement d'une règle graduée, d'un compas et d'une équerre.

Solution. Le point $M(\theta)$ a pour affixe $\theta e^{i\theta}$, c'est donc l'image, par la rotation de centre O et d'angle θ du point d'affixe θ . Ainsi, pour le construire :

- ✕ On place sur l'axe des abscisses le point d'affixe θ (c'est à dire de coordonnées $(\theta, 0)$, à l'aide de la règle graduée;
- ✕ Avec le compas (et la règle graduée pour mesurer l'unité), on trace le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.
- ✕ On place le point d'affixe $e^{i\theta}$. Pour ce faire, on place avec la règle graduée le point de coordonnées $(\cos(\theta), 0)$, puis avec l'équerre la normale à l'axe des abscisses passant par $(\cos(\theta), 0)$, qui va intersecter $\mathcal{C}$ en deux points de coordonnées $(\cos(\theta), \pm \sin(\theta))$ la connaissance du signe de $\sin(\theta)$ permet de ne garder que le bon point (par exemple on sait que $\sin(\theta_4) < 0$);
- ✕ On trace la demi-droite Δ_θ qui passe par O et $(\cos(\theta), \sin(\theta))$;
- ✕ Avec le compas, on reporte la distance de O à $(\theta, 0)$ sur la droite Δ_θ . Le point d'intersection de la droite Δ_θ et du cercle de centre O et de rayon θ est le point $M(\theta)$.

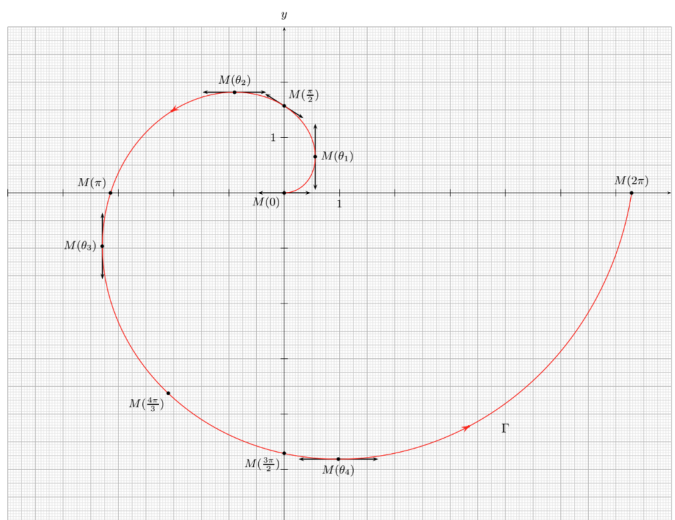
□

- b. Sur la feuille de papier millimétré fournie avec le sujet, placer avec précision les points $M(\theta)$ pour $\theta = \theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \frac{\pi}{2}$ avec leur tangente ainsi que les points $M(\theta)$ pour $\theta = \pi, \frac{3\pi}{2}$ et 2π . Il est conseillé de prendre une unité de 2 grands carreaux.
- c. Finir le tracé de Γ et placer le point $M\left(\frac{4\pi}{3}\right)$.

Solution. On place les points demandés sur la feuille grâce au processus de construction proposé ci avant avec les tangentes (horizontales ou verticales). On notera que

$$\frac{\pi}{2} \approx 1,57 \quad ; \quad \pi \approx 3,14 \quad ; \quad \frac{4\pi}{3} \approx 4,19 \quad ; \quad \frac{3\pi}{2} \approx 4,71 \quad ; \quad 2\pi \approx 6,28.$$

Pour placer la tangente en $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$, on constate que $z'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} + i$ donc elle est dirigée par le vecteur de coordonnées $\left(-\frac{\pi}{2}, 1\right)$.





Exercice 3 - Oral Math II 2025

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Réservé aux** 5/2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Solution. Notons χ_M le polynôme caractéristique de M . On a

$$\begin{aligned} \chi_M(\lambda) &= \det(\lambda I_3 - M) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda + 1 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & -1 \\ 0 & 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1) ((\lambda + 1)(\lambda - 1) + 2) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) \end{aligned}$$

En particulier, χ_M n'est pas scindé, la matrice M n'est donc pas diagonalisable (et pas trigonalisable non plus). □

2. Montrer qu'il existe une base (v_1, v_2) du sous-espace $G = \ker(f^2 + \text{Id})$ telle que $f(v_1) = v_2$.

Solution. Commençons par déterminer une base de G .

$$\begin{aligned} v = (x, y, z) \in G &\iff (M^2 + I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff x - z = 0 \iff v = (x, y, -x) \end{aligned}$$

Ainsi, $G = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 0))$.

On pose alors $v_1 = (0, 1, 0)$ et $v_2 = f(v_1) = (-1, -1, -1)$ qui bien un élément de G (c'est l'opposé de la somme des deux vecteurs ci-dessus). La famille (v_1, v_2) est clairement libre (et génératrice de G) donc forme bien une base de G . □

3. Déterminer une base (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f dans cette base soit

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution. Par Analyse-Synthèse. On cherche donc trois vecteurs u_1, u_2, u_3 tels que :

✗ (u_1, u_2, u_3) libre (ce qui suffit à former une base de $\mathbb{R}^3$ pour des raisons de cardinal)

✗ $f(u_1) = -u_2$

✗ $f(u_2) = u_1$ ce qui implique aussi que $f^2(u_1) = -u_1$ donc $u_1 \in G$;

✗ $f(u_3) = u_3$.

On peut alors prendre $u_2 = v_1$ et $u_1 = v_2$ (on aura bien $f(u_2) = f(v_1) = v_2$ et $f(u_1) = f^2(v_1) = -v_1 = -u_2$).

On cherche ensuite $u_3 \in \text{Ker}(f - \text{Id})$.

$$u = (x, y, z) \in \text{Ker}(f - \text{Id}) \iff \begin{cases} -y = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = -z \end{cases}$$

On prend donc $u_3 = (1, 0, -1)$ (qui vérifie bien $f(u_3) = u_3$).

Il reste à vérifier que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 &\iff \begin{cases} -a + c = 0 \\ -a + b = 0 \\ -a - c = 0 \end{cases} \\ &\iff a = b = c = 0 \end{aligned}$$

ce qui conclut la réponse à cette question. □

4. En déduire le calcul M^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution. Le caractère libre de la famille ci-dessus se reformule comme le fait que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f^2 + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - \text{Id})$ et chacun de ces deux sous-espaces est stable par f , ce qui s'observe sur la matrice T définie par blocs. Pour calculer T^n , il suffit donc de calculer les puissances de chaque bloc. Notant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, on observe que

$$A^2 = -I_2, \quad A^3 = -A, \quad A^4 = I_2,$$

ce qui permet de conjecturer (ce qui se montre facilement par récurrence), $A^n = \begin{cases} (-1)^k, & \text{si } n = 2k \\ (-1)^k A, & \text{si } n = 2k + 1 \end{cases}$.

Notant P la matrice de passage de la base canonique vers la base (u_1, u_2, u_3) , on a donc :

✕ Si $n = 2k$ est pair

$$M^n = M^{2k} = P \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

✕ Si $n = 2k + 1$ est pair

$$M^n = M^{2k+1} = P \begin{pmatrix} 0 & (-1)^k & 0 \\ (-1)^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

□

Exercice 4 - Oral Math II 2021 - Cercle tangent à une parabole et passant par son foyer

Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$.

On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des centres des cercles tangents à $\mathcal{P}$ et passant par le point $F(p/2, 0)$. Soit $A(a, b)$ un point de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{N}$ la normale en ce point. On note I le centre du cercle passant par F et tangent à $\mathcal{P}$ en A .

1. Donner un paramétrage de $\mathcal{P}$.

Solution. L'équation de la parabole se réécrit $x = \frac{y^2}{2p}$.

Un paramétrage de $\mathcal{P}$ est donc par exemple $M : t \in \mathbb{R} \mapsto \left(\frac{t^2}{2p}, t \right)$.

□

2. Montrer que tout point de $\mathcal{N}$ a des coordonnées de la forme $(a - \lambda p, b(1 + \lambda))$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solution. On appelle normale à la courbe, la droite normale à la tangente à la courbe au point concerné. Notons $x(t) = t^2/2p$ et $y(t) = t$. On a alors $M'(t) = (t/p, 1)$. La tangente en $A(a, b)$ est dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} b \\ p \end{pmatrix}$ et qui donne pour vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} p \\ -b \end{pmatrix}$. Une paramétrisation de $\mathcal{N}$ est donc

$$\mathcal{N} : A\lambda + \vec{n}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

et un point de $\mathcal{N}$ a donc bien pour coordonnées $(a - \lambda p, b(1 + \lambda))$.

□

3. Déterminer les coordonnées de I .

Solution. Le centre $I(x, y)$ vérifie les conditions suivantes : $I \in \mathcal{N}$ et $IF = IA$. On traduit ces deux conditions par des équations qu'on résout.

$$\begin{aligned} \begin{cases} I(x, y) \in \mathcal{N} \\ IF^2 = IA^2 \end{cases} &\iff \begin{cases} x = a - \lambda p \\ y = b(1 + \lambda) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = a - \lambda p \\ y = b(1 + \lambda) \\ \lambda = -\frac{a + \frac{p}{2}}{2p} = -\frac{b^2 + p^2}{4p^2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{3b^2 + p^2}{4p} \\ y = \frac{3p^2 b - b^3}{4p^2} \end{cases} \end{aligned}$$

□

4. Étudier et tracer la courbe paramétrée, lieu des points I , dans le cas où $p = 1$.

Solution. La courbe étudiée est donc paramétrée par $N : t \in \mathbb{R} \mapsto \left(\frac{3t^2 + 1}{4}, \frac{3t - t^3}{4} \right)$.

Notons X et Y les deux fonctions coordonnées. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on voit que $N(-t) = \mathcal{S}_{(Ox)}(N(t))$ (car X est paire et Y est impaire) ; on peut donc restreindre l'étude à $\mathbb{R}_+$ et compléter le tracé par symétrie d'axe (Ox) .

On a une branche infinie lorsque $t \rightarrow +\infty$, et comme $\frac{Y(t)}{X(t)} \sim -\frac{t}{3}$, il s'agit d'une branche parabolique de direction verticale (vers le bas). Pour $t \geq 0$, on a

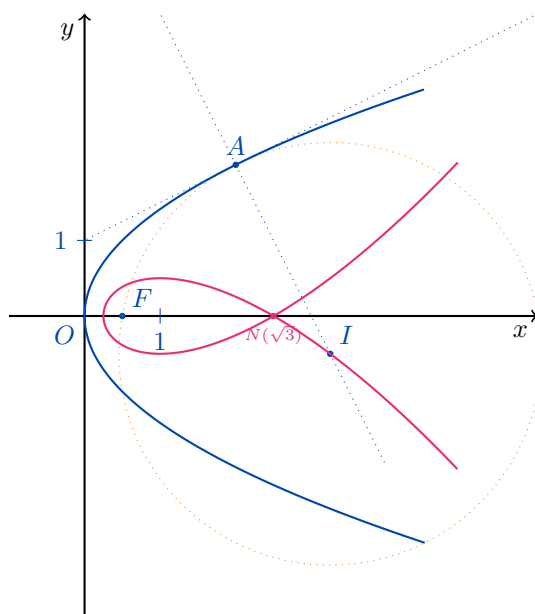
$$X'(t) = \frac{3t}{2}, \quad Y'(t) = \frac{3(1-t^2)}{4}.$$

On dresse le tableau de variations (il n'y a pas de point singulier)

t	0	1	$+\infty$
$X'(t)$	0	+	
X	$\frac{1}{4}$	1	$+\infty$
Y	0	$\frac{1}{2}$	$-\infty$
$Y'(t)$		+	0 -

ce qui permet le tracer ci-dessous. En bleu la parabole et en rose la courbe, lieu des points I .

La courbe rencontre l'axe des abscisses au point $N(\sqrt{3})$ qui est un point double (car sur l'axe de symétrie). La tangente en ce point est dirigée par $\vec{u} = (\sqrt{3}, -1)$.



□

Exercice 5 - Jeu du chaos

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé. Chaque point du plan est caractérisé par une liste de deux réels du type $[x, y]$.

On rappelle que, si C est un point et r un réel, l'image M' du point M par l'homothétie de centre C et de rapport r est l'unique point M' tel que :

$$\overrightarrow{CM'} = r \overrightarrow{CM}.$$

1. Écrire une fonction `H` de trois arguments, un point C , une valeur réelle r et un point M qui renvoie l'image de M par l'homothétie de centre C et de rapport r .

Solution.

```
def H(C,r,M):
    a, b = C[0], C[1] # coordonnées de C
    x, y = M[0], M[1] # coordonnées de M
    x1 = r*x + (1-r)*a # abscisse de M'
    y1 = r*y + (1-r)*b # ordonnée de M'
    return [x1,y1]
```

□

On se donne m homothéties du plan de centres C_i et de rapports $r_i \in]0, 1[$.

On appelle *jeu du chaos* la suite de points $(M_k)_{k \geq 0}$ construite de la manière suivante :

- ✗ le point M_0 est donné ;
- ✗ pour tout $k \geq 0$, on pose $M_{k+1} = H(C_i, r_i, M_k)$ où i est tiré au sort à chaque itération avec une loi équiprobable. Avec Python, on pourra utiliser la fonction `randint` de la bibliothèque `random`.

2. Écrire une fonction `tirer` de quatre arguments, la liste des centres des homothéties, la liste des rapports des homothéties, le point M_0 et le nombre n d'itérations qui renvoie la liste des $n + 1$ premiers points de la suite.

Solution.

```
def tirer(LC,Lr,M0, n):
    m = len(LC)
    k = 0
    M = M0
    Res = []
    while k < n+1:
        Res.append(M)
        i = np.random.randint(0,m) # tirage d'un entier i entre 0 et m-1
        C = LC[i] # le centre Ci
        r = Lr[i] # le rapport ri
        M = H(C,r,M)
        k += 1
    return Res
```

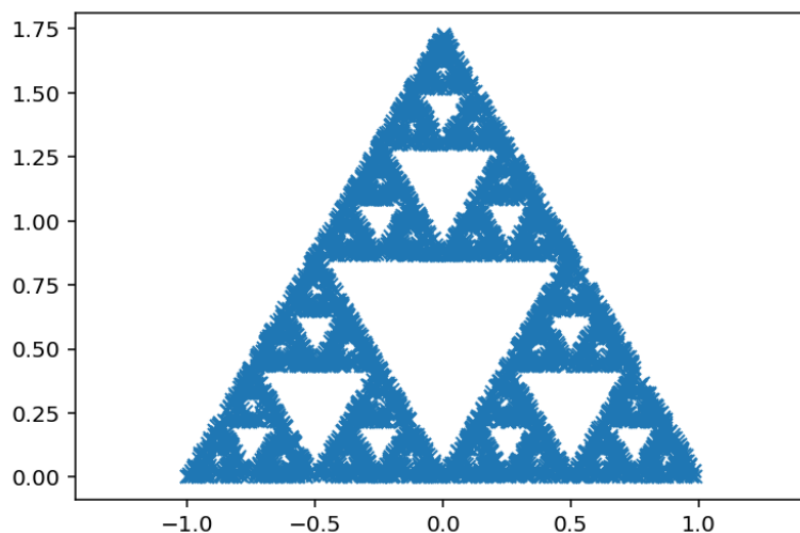
□

3. Tracer les 5001 premiers points de la suite définie par les trois homothéties de rapports 0.5 et de centres trois sommets d'un triangle équilatéral et de premier point l'un de ces sommets.

Solution.

```
A = [-1,0]; B = [1,0]; C = [0,np.sqrt(3)] # ABC est un triangle équilatéral
LC = [A,B,C] # les centres
Lr = [1/2,1/2,1/2] # les rapports

sys = tirer(LC,Lr,A,5000)
X = [p[0] for p in sys] # abscisses
Y = [p[1] for p in sys] # ordonnées
plt.plot(X,Y,'x')
plt.axis('equal')
plt.show()
```



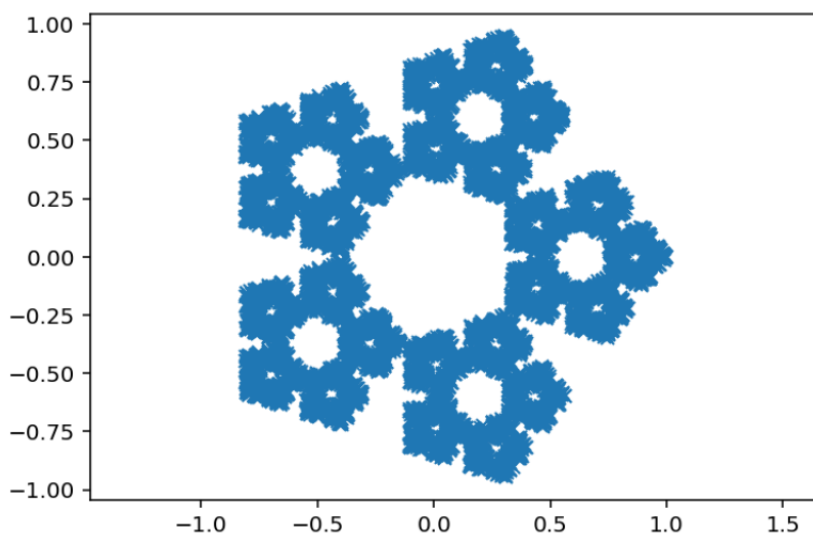
□

4. Définir une fonction T de trois arguments m , r et n qui trace les $n + 1$ premiers points de la suite obtenue pour un jeu d'homothéties de même rapport r et dont les centres sont les sommets d'un polynôme régulier à m côtés et de premier point l'un de ces sommets.
Tester $T(5, 0.37, 10000)$.

Solution.

```
def T(m,r,n):
    Lr = [r for k in range(m)]
    LC = [[np.cos(2*k*np.pi/m), np.sin(2*k*np.pi/m)] for k in range(m)]
    # Les images des racines m-ièmes de l'unité
    sys = tirer(LC,Lr,LC[0],n)
    X = [p[0] for p in sys] # abscisses
    Y = [p[1] for p in sys] # ordonnées
    plt.plot(X,Y,'x')
    plt.axis('equal')
    plt.show()
```

L'appel de $T(5, 0.37, 10000)$ produit l'affichage ci-dessous :



□