# Mathématiques PT. 2026 - 2027

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



## Devoir Libre n°3

*Solution en ligne le 30/11*

---

## Exercice

Pour $a \in \mathbb{R}$, on introduit $A(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $\mathscr{A} = \{A(a), a \in \mathbb{R}\}$.

**1**. $\mathscr{A}$ est-il un s.e.v. de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ ?
**2**. $\mathscr{A}$ est-il stable par produit?
**3**. Trouver une valeur de $a$ pour que $A(a)$ soit inversible.
**4**. Trouver $a_0 \neq 0$ tel $B = A(a_0)$ soit la matrice dans la base canonique d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$.
**5**. Que dire de $C = I_3 - B$ ?
**6**. Trouver $\lambda(a) \in \mathbb{R}$ tel que $A(a) = B - \lambda(a)C$. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, $[A(a)]^n$.

## Problème

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par :

$$a_n = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

On étudie la série de terme général $a_n$. On montre qu'elle est convergente et on donne des représentations de sa somme, notée $\gamma$, et appelée *constante d'Euler*. Pour cela on commence par étudier la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} a_p = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln(n+1).$$

On s'intéresse également à la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $H_0 = 0$ et pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$H_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}.$$

### Préliminaires - formule de Frullani

Soient $a \leq b$ sont deux réels strictement positifs.

**1**. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Soient $x$ et $y$ deux réels strictement positifs.

**2**. **a**. Démontrer que :

$$\int_x^y \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{ax}^{bx} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{ay}^{by} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

**b**. Montrer que, pour tout réel $z > 0$ :

$$\mathrm{e}^{-bz} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \leqslant \int_{az}^{bz} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{-az} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

**c**. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

## Partie 1. Une approche de la constante d'Euler

**3**. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. En encadrant l'intégrale $\displaystyle\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$, montrer que l'on a : $0 \leqslant a_p \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$.

**4**. En déduire que la suite $(S_n)$ est majorée, puis qu'elle est convergente et que sa limite $\gamma$ appartient à l'intervalle $[0,1]$.

**5**. Vérifier que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$a_p = \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{t}{t+p}\mathrm{d}t$$

puis montrer que pour tout entier $p \geqslant 2$ on a :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \leqslant a_p \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right).$$

**6**. En déduire un encadrement de $S_m - S_n$ pour $m$ et $n$ des entiers vérifiant $m > n \geqslant 1$. Puis montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$\frac{1}{2n+2} \leqslant \gamma - S_n \leqslant \frac{1}{2n}.$$

**7**. Conclure qu'on a le développement asymptotique suivant pour la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ :

$$H_n \underset{n\to\infty}{=} \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

**8**. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $T_n = S_n + \dfrac{1}{2n+2}$. Montrer que l'on a : $0 \leqslant \gamma - T_n \leqslant \dfrac{1}{2n(n+1)}$.

**9**. Déterminer un entier $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $T_n$ est une valeur approchée de $\gamma$ à $10^{-2}$ près. Donner alors un encadrement de $\gamma$ à $10^{-2}$ près.

## Partie 2. Une représentation intégrale de la constante d'Euler

**10**. Dans cette question, on se propose de démontrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$.

**a**. Montrer que les deux intégrales suivantes sont convergentes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t.$$

**b**. Déterminer la limite de $\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \dfrac{1}{t}$ quand $t \to 0^+$.

**c**. Conclure.

**11**. **a**. Démontrer que pour pour tout réel $t > 0$ on a :

$$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt} \quad \text{et} \quad \frac{1}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{-nt} - \mathrm{e}^{-(n+1)t}}{t}\right).$$

**b**. En déduire que pour pour tout réel $t > 0$ on a :

$$\mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-(n+1)t} - \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)t} - \mathrm{e}^{-(n+2)t}}{t}\right).$$

**c**. Démontrer que pour tout réel $t > 0$, on a : $1 - \dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t} \geqslant 0$.

**d**. Retrouver alors la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ et démontrer l'égalité :

$$\gamma = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t.$$