



Devoir surveillé n°1

Vendredi 11 Septembre

Durée : 4 heures

Ce devoir comporte trois exercices et un problème tous indépendants qui **doivent** TOUS être rédigés sur des copies séparées.

La qualité de la rédaction et de la présentation (notamment de la lisibilité), la précision, la concision, la rigueur et la clarté des raisonnements, sont des éléments importants pour l'évaluation de la copie.

En particulier, les résultats doivent être encadrés à la règle et vos feuillets doivent être numérotés.

Préambule - Extrait du cahier de vacances

1. Énoncer précisément l'inégalité des accroissements finis.

On pose $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \cos(u_n)$.

2. Montrer que l'équation $\cos(x) = x$ admet une unique solution α , et que $\alpha \in [0, 1]$.

3. Démontrer que : $\forall (a, b) \in [0, 1]^2, |\cos(b) - \cos(a)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}|b - a|$.

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$. Montrer ensuite que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$. En déduire la limite de u_n .

5. Écrire en langage Python, une fonction `valeur_approchée` d'argument k qui retourne une valeur approchée de α à 10^{-k} près.

Exercice 1 - Extrait d'une annale

1. Rappeler, pour tout réel x de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, les deux expressions (l'une faisant intervenir la fonction cosinus, l'autre la fonction tangente) de la dérivée de la fonction

$$x \mapsto \tan(x).$$

2. a. Montrer que la fonction g qui, à tout réel x de $]0, \pi[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, associe $g(x) = \frac{1}{\tan x}$, se prolonge en une fonction $\tilde{g}$ continue sur $]0, \pi[$.

Montrer que $\tilde{g}$ est dérivable sur $]0, \pi[$.

b. En déduire une primitive sur $]0, \pi[$ de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}.$$

3. On considère les fonctions

$$f_1 : x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{et} \quad f_2 : x \mapsto \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

- Expliciter les domaines de définition respectifs $\mathcal{D}_{f_1} \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_{f_2} \subset \mathbb{R}$ des fonctions f_1 et f_2 .
- Montrer que les fonctions f_1 et f_2 sont périodiques, de périodes respectives T_1 et T_2 que l'on explicitera.
- Donner les domaines de dérivabilité respectifs des fonctions f_1 et f_2 .
- Donner, en tout réel x du domaine de dérivabilité de la fonction f_1 , l'expression de $f'_1(x)$.
- Montrer que, en tout réel x du domaine de dérivabilité de la fonction f_2 ,

$$f'_2(x) = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)},$$

et en déduire une expression simplifiée de $f'_2(x)$.

- Étudier les variations des fonctions f_1 et f_2 . On donnera leurs tableaux de variations respectifs sur une période, en précisant les limites aux bords.
Donner, également, les valeurs des fonctions f_1 et f_2 en $\frac{\pi}{2} [2\pi]$.
- Tracer, sur un même graphe sur le quadrillage de l'**Annexe 1** (échelle : 1 grand carreau pour une unité), la courbe représentative de f_1 sur $\mathcal{D}_{f_1} \cap [-2\pi, 2\pi]$ et la courbe représentative de f_2 sur $\mathcal{D}_{f_2} \cap [-2\pi, 2\pi]$.

4. On considère la fonction

$$f_3 : x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

- Expliciter le domaine de définition $\mathcal{D}_{f_3} \subset \mathbb{R}$ de la fonction f_3 . Quel est le domaine de dérivabilité de f_3 ?
- Étudier les variations de la fonction f_3 sur $[0, \frac{\pi}{4}]$. On donnera son tableau de variations, en précisant les limites aux bords.

Exercice 2 - Extrait d'une autre annale

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul. On note λ_1 et λ_2 les deux racines réelles du polynôme $X^2 + X - 1$ de sorte que $\lambda_1 < \lambda_2$.

- Justifier que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + x - 1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur chacun des trois intervalles constituant son ensemble de définition que l'on précisera.
- Rappeler l'énoncé de la **formule de Leibniz** (et ses hypothèses de validité) donnant la dérivée $n^{\text{ième}}$ du produit de deux fonctions u et v .
- On suppose, uniquement dans cette question que $n \geq 2$.
En utilisant la relation $(x^2 + x - 1) f(x) = 1$, montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$ privé de λ_1 et λ_2 :

$$(x^2 + x - 1) f^{(n)}(x) + n(2x + 1) f^{(n-1)}(x) + n(n-1) f^{(n-2)}(x) = 0.$$

- On pose, pour tout entier naturel $p : u_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$.
 - Que valent u_0 et u_1 ?
 - On suppose, uniquement dans cette question : $p \geq 2$. Montrer que : $u_p = u_{p-1} + u_{p-2}$.
 - Exprimer, pour tout entier naturel $p \geq 2$, u_p en fonction de p, λ_1 et λ_2 .
- Exprimer, en utilisant la formule de Taylor-Young, le développement limité de f à l'ordre n au voisinage de 0.
- a. Déterminer deux réels α et β tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \lambda_2\}, \quad \frac{1}{x^2 + x - 1} = \frac{\alpha}{x - \lambda_1} + \frac{\beta}{x - \lambda_2}.$$

- Exprimer, en fonction de λ_1 et λ_2 , la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction $x \mapsto \frac{\alpha}{x - \lambda_1}$. Donner, de même, en fonction de λ_1 et λ_2 , la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction $x \mapsto \frac{\beta}{x - \lambda_2}$.
- Retrouver alors le résultat de la Question 5. c.

7. **Réservé aux 5/2.** On s'intéresse maintenant à la série de terme général $v_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \lambda_2^n$.

- Cette série est-elle convergente ?

- Que vaut $\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$?

Problème

Partie 1 - Une suite de polynômes à coefficients réels

On considère la suite de polynômes $(T_n)_{n \geq 0}$ à coefficients réels définie par

$$T_0(X) = T_1(X) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2T_{n+1} - (1 + X^2)T_n(X).$$

1. Expliciter $T_n(X)$ pour $0 \leq n \leq 5$.
2. Montrer, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(T_n) = 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ et préciser le coefficient dominant de T_n .
On distinguera les cas n pair et n impair.
3. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient constant de T_n .

On décide de représenter, en **Python**, un polynôme par la liste de ses coefficients. Par exemple, le polynôme nul est représenté par la liste vide `[]`, le polynôme constant 1 est représenté par la liste `[1]` quant au polynôme $2X^3 + X$, il est représenté par la liste `[0, 1, 0, 2]`.

4. a. Écrire une fonction `addition(P, Q)` qui prend en argument deux listes $P = [p_0, p_1, \dots, p_n]$ et $Q = [q_0, q_1, \dots, q_m]$ et qui renvoie la liste R des coefficients du polynôme $\sum_{k=0}^n p_k X^k + \sum_{k=0}^m q_k X^k$.
- b. Expliquer ce que fait la fonction `mystere`, d'argument une liste $P = [p_0, p_1, \dots, p_n]$, ci-dessous :

```
def mystere(P) :
    Q = [0, 0] + P
    return addition(P, Q)
```

- c. Écrire une fonction `T(n)` d'argument un entier n , et qui renvoie la liste des coefficients du polynôme T_n .
Cette fonction utilisera les fonctions `addition` et `mystere` ci-dessus.

Partie 2 - D'autres polynômes

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le polynôme à coefficients complexes $P_n(X) = (1 + iX)^n$. On pose $P_0(X) = 1$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer, sous forme développée, deux polynômes $R_n(X)$ et $S_n(X)$, à coefficients réels, tels que :

$$P_n(X) = R_n(X) + iS_n(X).$$

6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$R_{n+1}(X) = R_n(X) - XS_n(X), \quad \text{et} \quad S_{n+1}(X) = XR_n(X) + S_n(X).$$

On pourra calculer $(1 + iX)^{n+1}$.

7. En déduire une relation de récurrence entre $R_{n+2}(X)$, $R_{n+1}(X)$ et $R_n(X)$.

8. En vérifiant, pour $\theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, que $1 + i \tan(\theta) = \frac{e^{i\theta}}{\cos(\theta)}$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \quad R_n(\tan(\theta)) = \frac{\cos(n\theta)}{\cos^n(\theta)} \quad \text{et} \quad S_n(\tan(\theta)) = \frac{\sin(n\theta)}{\cos^n(\theta)}.$$

Dans toute la suite de ce problème on fixe un entier n **pair**.

On note $x_0, x_2, \dots, x_{n-1}$ les racines complexes de R_n comptées avec multiplicité.

9. a. Vérifier que, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a : $\frac{2k+1-n}{n} \in]-1, 1[$.
- b. Montrer que, quitte à ré-indexer les racines, on a :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad x_k = \tan\left(\frac{(2k+1-n)\pi}{2n}\right).$$

10. Déduire des Questions **2.**, **7.** et **9.b.** que :

$$T_n(X) = (-1)^{\frac{n}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \tan\left(\frac{(2k+1-n)\pi}{2n}\right) \right).$$

où T_n désigne le polynôme de la **Partie 1**.

11. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \tan\left(\frac{(2k+1-n)\pi}{2n}\right) = 0.$$

12. Que vaut le produit : $\prod_{k=0}^{n-1} \tan\left(\frac{(2k+1-n)\pi}{2n}\right)$?

13. a. Montrer que, pour tout réel a tel que $R_n(a) \neq 0$,

$$\frac{R'_n(a)}{R_n(a)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a - \tan\left(\frac{(2k+1-n)\pi}{2n}\right)}$$

b. En déduire, pour $\theta \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$, une expression de

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\tan(\theta) - \tan\left(\frac{(2k+1-n)\pi}{2n}\right)}$$

en fonction de n et θ .

Partie 3 - Construction (via les sommets) d'un polygone régulier

Dans cette partie, l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle d'un repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1, Δ_0 la droite d'équation $\operatorname{Re}(z) = 0$, et Δ_1 la droite d'équation $\operatorname{Re}(z) = 1$.

On introduit la fonction $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right).$$

On rappelle que n désigne un entier naturel pair.

On définit, pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, les points M_k de coordonnées $\psi(x_k)$, où les x_k sont les racines du polynôme R_n introduit dans la partie précédente, et on note z_k l'afixe du point M_k .

14. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point de coordonnée $\psi(t)$ est un élément de $\mathcal{C} \setminus \Delta_0$, puis, montrer que :

$$\forall \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \quad \psi(\tan(\theta)) = (\cos(\theta), \sin(\theta)).$$

15. Justifier que ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Expliciter le développement limité à l'ordre 3 en 0 de ψ .

16. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^{2n} = -1$.

17. **Construction à la règle et au compas.** Dans cette question, on ne peut utiliser qu'une règle **non graduée**, un compas et le quadrillage fourni.

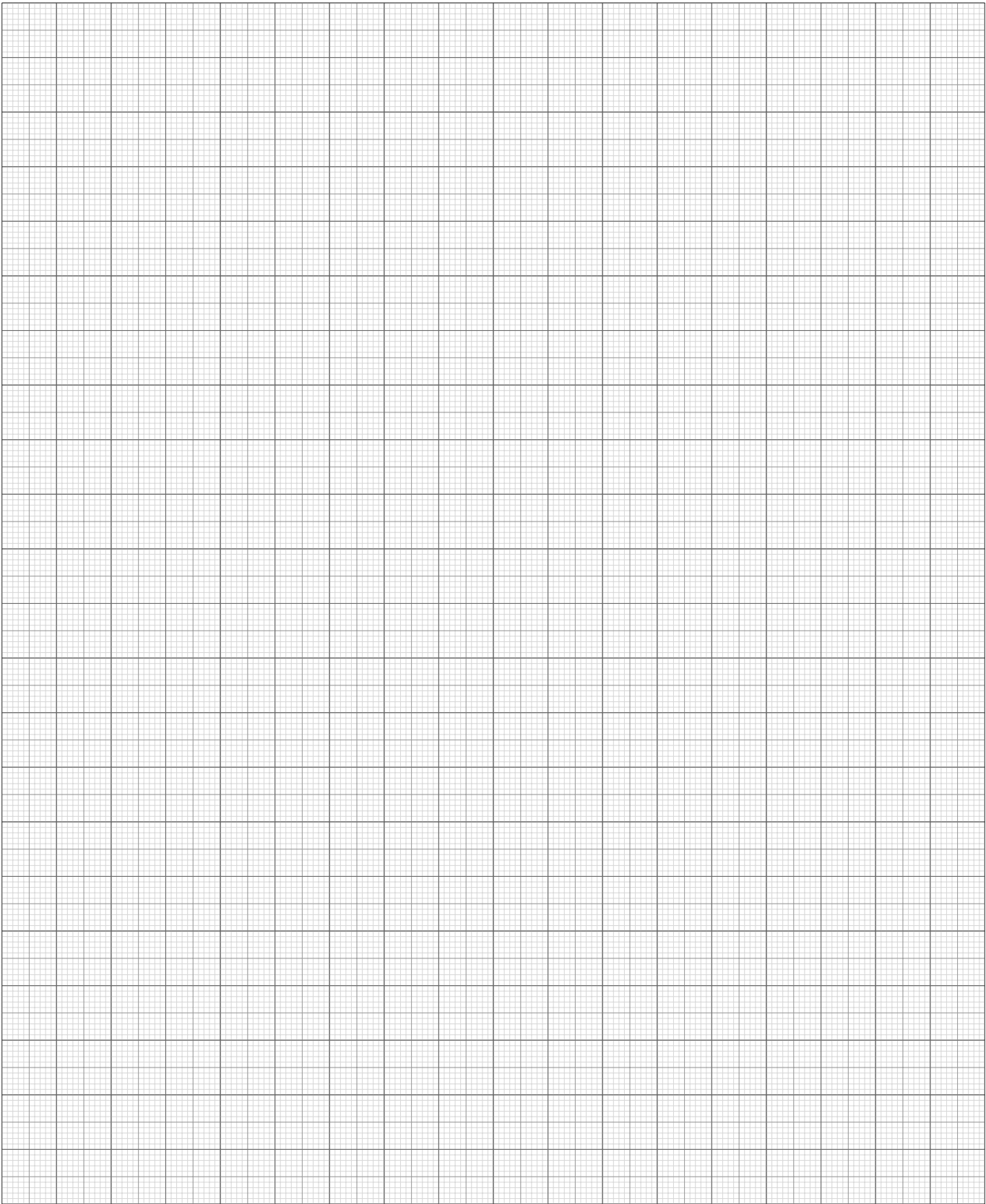
On note, pour $t \in \mathbb{R}$, A_t le point de coordonnées $\psi(t)$ et Q_t le point d'intersection des droite (OA_t) et Δ_1 .

On rappelle que pour construire la bissectrice d'un angle $\widehat{OAB}$, on commence par placer un point M sur le segment $[OA]$ puis on reporte la distance pour construire N sur $[OB]$ tel que $OM = ON$ (N est alors le symétrique de M par rapport à la bissectrice) et la bissectrice cherchée est alors la médiatrice du segment $[MN]$, c'est à dire l'ensemble des points équidistants de M et N .

- Construire, sur le quadrillage de l'**Annexe 2** (échelle : 10 grands carreaux pour une unité), le point P_0 d'afixe $e^{\frac{i\pi}{8}}$.
- Placer ensuite, à l'aide du compas, l'ensemble des points P_k dont les affixes sont les solutions de l'équation $z^8 = -1$.
On expliquera la méthode de construction.
- Déterminer, pour $t \in \mathbb{R}$, les coordonnées de Q_t .
- En déduire, pour $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, une valeur approchée à 10^{-2} de x_k racine de P_4 introduit dans la partie précédente.



Annexe 1 : Quadrillage à rendre avec la copie (Exercice 1)



Annexe 2 : Quadrillage à rendre avec la copie (Problème, Partie 3)

