



Devoir surveillé n°1

Solution

Préambule - Extrait du cahier de vacances

1. Énoncer précisément l'**inégalité des accroissements finis**.

Solution. Sur le bout des doigts sans l'ombre d'une hésitation.

Théorème.

Inégalité des accroissements finis

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que, $|f'|$ majorée par $K \geq 0$. Alors :

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

□

On pose $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \cos(u_n)$.

2. Montrer que l'équation $\cos(x) = x$ admet une unique solution α , et que $\alpha \in [0, 1]$.

Solution. On pose $g(x) = \cos(x) - x$ et on a : $\cos(x) = x \iff g(x) = 0$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme somme de fonctions qui le sont, et pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g'(x) = -\sin(x) - 1 \leq 0, \quad \text{avec} \quad g'(x) = 0 \iff \sin(x) = -1 \iff x \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi].$$

Donc g est continue strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $g(0) > 0 > g(1)$. Donc, d'après le corollaire du T.V.I. (théorème de la bijection monotone), l'équation $\cos(x) = x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et $\alpha \in]0, 1[$. □

3. Démontrer que : $\forall (a, b) \in [0, 1]^2, |\cos(b) - \cos(a)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}|b - a|$.

Solution. La fonction $\cos$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in [0, 1]$,

$$|\cos'(x)| = |-\sin(x)| = \underbrace{\sin(x)}_{\geq 0} \leq \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

car la fonction $\sin$ est croissante sur $[0, \frac{\pi}{3}]$, qui contient $[0, 1]$. Donc, d'après l'I.A.F.,

$$\forall (a, b) \in [0, 1]^2, |\cos(b) - \cos(a)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}|b - a|.$$

□

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$. Montrer ensuite que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$. En déduire la limite de u_n .

Solution. On procède par récurrence.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $\mathcal{P}_n$: " $u_n \in [0, 1]$ et $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ ".

x Initialisation : $u_0, \alpha \in [0, 1]$ donc $|u_0 - \alpha| \leq 1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^0$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

x Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie (HR). On a donc : $u_n, \alpha \in [0, 1]$ et $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$. On en déduit que $u_{n+1} = \cos(u_n) \in [0, 1]$ puis, d'après **1.** et **2.**, que :

$$|u_{n+1} - \alpha| = |\cos(u_n) - \cos(\alpha)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} |u_n - \alpha| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$$

et $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, ce qui termine la récurrence.

De plus, $0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$ et donc, par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$. □

5. Écrire en langage Python, une fonction `valeur_approchée` d'argument k qui retourne une valeur approchée de α à 10^{-k} près.

Solution. On calcule u_n tant que $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n > 10^{-k}$. Le premier entier n ne vérifiant pas cette inégalité permet d'avoir u_n tel que $|u_n - \alpha| \leq 10^{-k}$ et u_n fournit donc une valeur approchée de α à 10^{-k} près.

```
import numpy as np
def a(k) :
    N=0
    u=1/2
    while np.sqrt(3/2)**N > 10**(-k) :
        n=N+1
        u=np.cos(u)
    return u
```

□

Exercice 1 - Extrait d'une annale

Cet exercice est extrait du sujet Mathématiques C, Banque PT 2024.

1. Rappeler, pour tout réel x de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, les deux expressions (l'une faisant intervenir la fonction cosinus, l'autre la fonction tangente) de la dérivée de la fonction

$$x \mapsto \tan(x).$$

Solution. On sait que :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2(x).$$

□

2. a. Montrer que la fonction g qui, à tout réel x de $]0, \pi[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, associe $g(x) = \frac{1}{\tan x}$, se prolonge en une fonction $\tilde{g}$ continue sur $]0, \pi[$.
Montrer que $\tilde{g}$ est dérivable sur $]0, \pi[$.

Solution. Pour tout réel $x \in]0, \pi[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, on a

$$g(x) = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Ce quotient est en fait défini sur $]0, \pi[$, le dénominateur ne s'y annule jamais.

En posant donc

$$\forall x \in]0, \pi[, \quad \tilde{g}(x) = \frac{\cos x}{\sin x},$$

on a un prolongement continu de g , et ce prolongement est dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $]0, \pi[$ comme quotient de fonctions usuelles avec la même régularité, dont le dénominateur ne s'annule pas. □

- b. En déduire une primitive sur $]0, \pi[$ de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}.$$

Solution. Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sin^2 x}$ sur $]0, \pi[$ est $x \mapsto -\tilde{g}(x) = -\frac{\cos x}{\sin x}$, car la dérivée de cette dernière fonction est

$$x \mapsto -\frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

□

3. On considère les fonctions

$$f_1 : x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{et} \quad f_2 : x \mapsto \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

- a. Expliciter les domaines de définition respectifs $\mathcal{D}_{f_1} \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_{f_2} \subset \mathbb{R}$ des fonctions f_1 et f_2 .

Solution. On a $\mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R} \setminus (\pi + 2\pi\mathbb{Z})$ et $\mathcal{D}_{f_2} = \left\{x \in \mathbb{R} : \tan\left(\frac{x}{2}\right) > 0\right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]2k\pi, (2k+1)\pi[.$

□

- b. Montrer que les fonctions f_1 et f_2 sont périodiques, de périodes respectives T_1 et T_2 que l'on explicitera.

Solution. Puisque $\tan$ est périodique de période π , les fonctions f_1 et f_2 sont toutes les deux périodiques de période $T_1 = T_2 = 2\pi$:

$$\forall x \in \mathcal{D}_{f_1}, f_1(x + 2\pi) = \tan\left(\frac{x + 2\pi}{2}\right) = \tan\left(\frac{x}{2} + \pi\right) = f_1(x).$$

□

- c. Donner les domaines de dérivabilité respectifs des fonctions f_1 et f_2 .

Solution. Les fonctions f_1 et f_2 sont dérivables en tout point de leur ensemble de définition, c'est-à-dire sur $\mathcal{D}_{f_1}$ (resp. $\mathcal{D}_{f_2}$) car c'est le cas de la fonction $\tan$ et car, pour tout $x \in \mathcal{D}_2$, $\tan(x/2) > 0$ et la fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

□

- d. Donner, en tout réel x du domaine de dérivabilité de la fonction f_1 , l'expression de $f'_1(x)$.

Solution. On a

$$\forall x \in \mathcal{D}_{f_1}, f'_1(x) = \frac{1}{2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2}.$$

□

- e. Montrer que, en tout réel x du domaine de dérivabilité de la fonction f_2 ,

$$f'_2(x) = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)},$$

et en déduire une expression simplifiée de $f'_2(x)$.

Solution. Puisque $f_2 = \ln \circ f_1$ sur $\mathcal{D}_{f_2}$, on a donc

$$\forall x \in \mathcal{D}_{f_2}, f'_2(x) = \frac{f'_1(x)}{f_1(x)} = \frac{1}{2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \tan\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\sin(x)}.$$

□

- f. Étudier les variations des fonctions f_1 et f_2 . On donnera leurs tableaux de variations respectifs sur une période, en précisant les limites aux bords.

Donner, également, les valeurs des fonctions f_1 et f_2 en $\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Solution. Les fonctions f_1 et f_2 sont strictement croissantes sur leur domaine respectif.

x	$(2k-1)\pi$	$2k\pi$	$2k\pi + \frac{\pi}{2}$	$(2k+1)\pi$
f_1				
f_2				

□

- g. Tracer, sur un même graphe sur le quadrillage de l'**Annexe 1** (*échelle* : 1 grand carreau pour une unité), la courbe représentative de f_1 sur $\mathcal{D}_{f_1} \cap [-2\pi, 2\pi]$ et la courbe représentative de f_2 sur $\mathcal{D}_{f_2} \cap [-2\pi, 2\pi]$.

Solution. Les nombres dérivées $f_1'(0) = 1/2$ et $f_2'(\pi/2) = 1$ permettent de tracer les tangentes pour guider le tracé.

□

4. On considère la fonction

$$f_3 : x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

- a. Expliciter le domaine de définition $\mathcal{D}_{f_3} \subset \mathbb{R}$ de la fonction f_3 . Quel est le domaine de dérivabilité de f_3 ?

Solution. Par les théorèmes généraux, la fonction f_3 est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

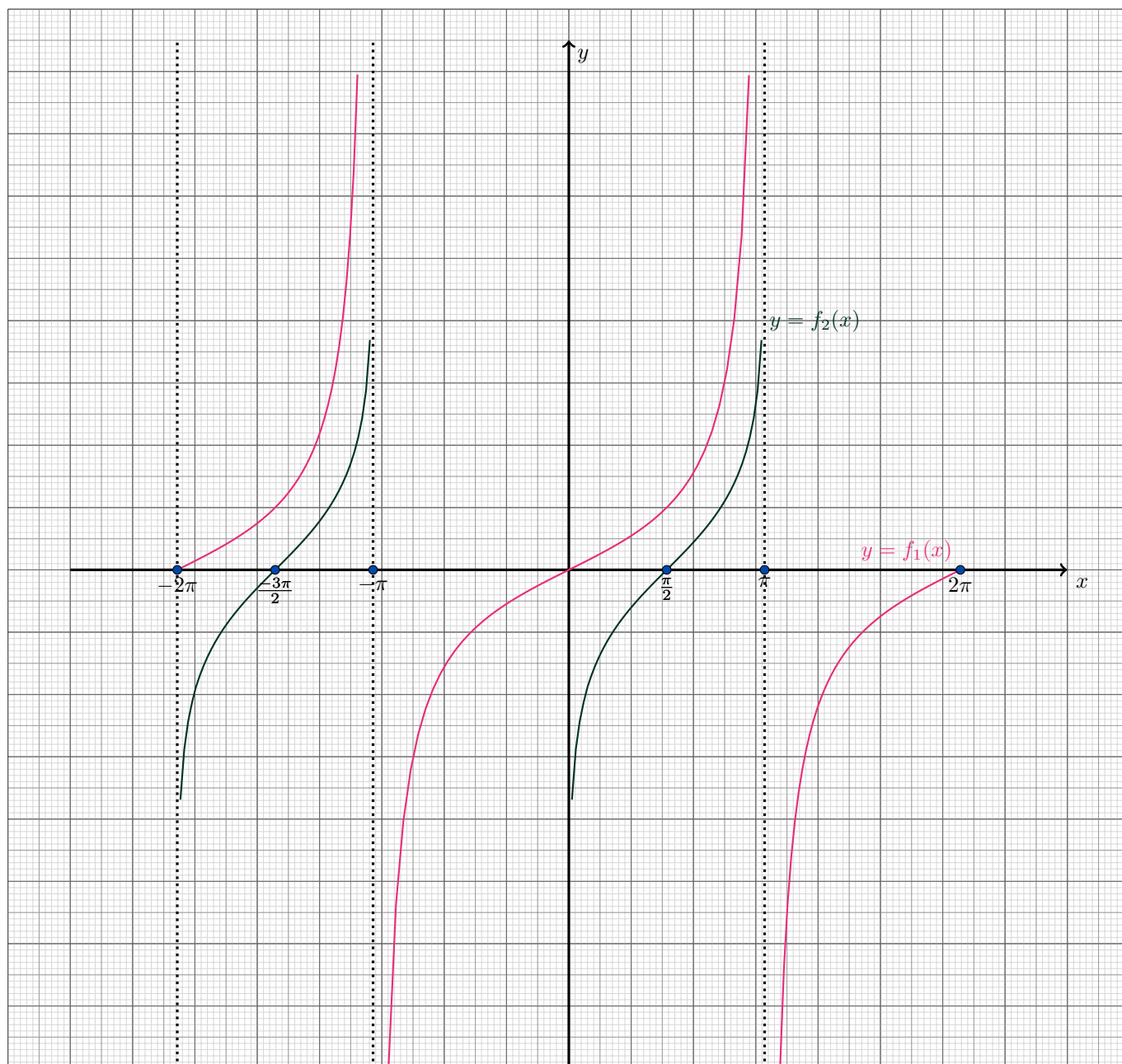
□

- b. Étudier les variations de la fonction f_3 sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. On donnera son tableau de variations, en précisant les limites aux bords.

Solution. Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \subset \mathcal{D}_{f_3}$, $f'(x) = \frac{2 \cos(x) \sin(x)}{\cos^4(x)} = \frac{2 \sin(x)}{\cos^3(x)} \geq 0$ et f_3 est donc croissante.

x	0	$\frac{\pi}{4}$
f_3	1	2

□



Exercice 2 - Extrait d'une autre annale

Cet exercice est extrait du sujet Mathématiques C, Banque PT 2024.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul. On note λ_1 et λ_2 les deux racines réelles du polynôme $X^2 + X - 1$ de sorte que $\lambda_1 < \lambda_2$.

- Justifier que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + x - 1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur chacun des trois intervalles constituant son ensemble de définition que l'on précisera.

Solution. Le polynôme $X^2 + X - 1$ a pour discriminant $\Delta = 5$ et pour racines $\lambda_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Sur chacun des intervalles $] -\infty, \lambda_1[$, $]\lambda_1, \lambda_2[$ et $]\lambda_2, +\infty[$ la fonction polynomiale $x \mapsto x^2 + x - 1$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et ne s'annule pas, il suit que c'est aussi le cas pour f d'après les théorèmes généraux. $\square$

- Rappeler l'énoncé de la **formule de Leibniz** (et ses hypothèses de validité) donnant la dérivée $n^{\text{ième}}$ du produit de deux fonctions u et v .

Solution. Du cours ! Des points gratuits !

Théorème .**Formule de Leibniz**

Soient $n \in \mathbb{N}$, et $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$. Alors $u \times v$ est de classe $\mathcal{C}^n$, de sorte que

$$(u \times v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} \times v^{(n-k)}.$$

□

3. On suppose, uniquement dans cette question que $n \geq 2$.

En utilisant la relation $(x^2 + x - 1)f(x) = 1$, montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$ privé de λ_1 et λ_2 :

$$(x^2 + x - 1)f^{(n)}(x) + n(2x + 1)f^{(n-1)}(x) + n(n-1)f^{(n-2)}(x) = 0.$$

Solution. On note $u : x \mapsto x^2 + x - 1$ qui est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme mentionné ci-avant. On applique la formule de Leibniz au produit $u \times f$ en observant que,

$$\forall k \geq 3, u^{(k)} = 0$$

car u est polynomiale de degré 2. Dans le développement de la formule de Leibniz, il ne va donc rester que trois termes, correspondant respectivement à $k = 0, k = 1$ et $k = 2$. Comme

$$\begin{cases} u^{(0)}(x) &= x^2 + x - 1 \\ u^{(1)}(x) &= 2x + 1 \\ u^{(2)}(x) &= 2 \end{cases},$$

on obtient,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x) = u^{(0)}(x) f^{(n)}(x) + n u^{(1)}(x) f^{(n-1)}(x) + \frac{n(n-1)}{2} u^{(2)}(x) f^{(n-2)}(x) \\ &= (x^2 + x - 1) f^{(n)}(x) + n(2x + 1) f^{(n-1)}(x) + n(n-1) f^{(n-2)}(x), \end{aligned}$$

ce qui est bien la relation attendue.

□

4. On pose, pour tout entier naturel p : $u_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$.

- a. Que valent u_0 et u_1 ?

Solution. $u_0 = f(0) = -1$ et $u_1 = f'(0) = -1$ car $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \lambda_2\}, f'(x) = \frac{-2x-1}{(x^2+x-1)^2}$.

□

- b. On suppose, uniquement dans cette question : $p \geq 2$. Montrer que : $u_p = u_{p-1} + u_{p-2}$.

Solution. Appliquons l'identité de la Question 4. avec $n = p$ et $x = 0$. Il vient

$$-p!u_p + p \times (p-1)!u_{p-1} + p(p-1) \times (p-2)!u_{p-2} = 0,$$

d'où le résultat en divisant par $p!$.

□

- c. Exprimer, pour tout entier naturel $p \geq 2$, u_p en fonction de p, λ_1 et λ_2 .

Solution. L'équation caractéristique associée à la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 ci-dessus est $x^2 - x - 1 = 0$, et celle-ci possède les deux racines réelles distinctes $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = -\lambda_1$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\lambda_2$, donc il existe deux réels γ et δ tels que

$$\forall p \in \mathbb{N}, u_p = \gamma(-\lambda_1)^p + \delta(-\lambda_2)^p.$$

On détermine γ et δ à l'aide des valeurs de u_0 et u_1 , ce qui conduit au système

$$\begin{cases} \gamma + \delta = -1 \\ \lambda_1 \gamma + \lambda_2 \delta = 1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Finalement, $\forall p \in \mathbb{N}, u_p = \frac{(-1)^p}{\sqrt{5}} (\lambda_1^{p+1} - \lambda_2^{p+1})$.

□

5. Exprimer, en utilisant la formule de Taylor-Young, le développement limité de f à l'ordre n au voisinage de 0.

Solution. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de l'origine, donc elle possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, et ce développement est donné par la formule de Taylor-Young :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{p=0}^n \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p + o(x^n) = \sum_{p=0}^n u_p x^p + o(x^n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{p=0}^n (-1)^p (\lambda_1^{p+1} - \lambda_2^{p+1}) x^p + o(x^n).$$

□

6. a. Déterminer deux réels α et β tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \lambda_2\}, \quad \frac{1}{x^2 + x - 1} = \frac{\alpha}{x - \lambda_1} + \frac{\beta}{x - \lambda_2}.$$

Solution. On pourrait procéder par identification. Ou sinon, en multipliant les deux membres de l'identité $\frac{1}{(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)} = \frac{\alpha}{x - \lambda_1} + \frac{\beta}{x - \lambda_2}$ par $x - \lambda_1$, puis en remplaçant x par λ_1 , on obtient la valeur de α . On fait de même pour β , d'où

$$\alpha = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{-1}{\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{5}} = -\alpha.$$

□

b. Exprimer, en fonction de λ_1 et λ_2 , la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction $x \mapsto \frac{\alpha}{x - \lambda_1}$. Donner, de même, en fonction de λ_1 et λ_2 , la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction $x \mapsto \frac{\beta}{x - \lambda_2}$.

Solution. Par une récurrence évidente :

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(\alpha (x - \lambda_1)^{-1} \right) = \alpha (-1)^n n! (x - \lambda_1)^{-(n+1)} \quad \text{et} \quad \frac{d^n}{dx^n} \left(\beta (x - \lambda_2)^{-1} \right) = \beta (-1)^n n! (x - \lambda_2)^{-(n+1)}.$$

□

c. Retrouver alors le résultat de la Question 4.c.

Solution. On remplace n par p , ainsi que α et β par leur valeur, et x par 0, et on obtient :

$$u_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!} = \frac{(-1)^p}{\sqrt{5}} \left(\frac{-1}{(-\lambda_1)^{p+1}} + \frac{1}{(-\lambda_2)^{p+1}} \right) = \frac{(-1)^p}{\sqrt{5}} \left(\frac{(-\lambda_1)^{p+1} - (-\lambda_2)^{p+1}}{(\lambda_1 \lambda_2)^{p+1}} \right).$$

Or $\lambda_1 \lambda_2 = -1$, et après simplification des facteurs $(-1)^p$, il reste

$$u_p = \frac{(-1)^p}{\sqrt{5}} \left(\lambda_1^{p+1} - \lambda_2^{p+1} \right),$$

ce qui est bien ce que l'on avait déjà obtenu à la Question 4.c.

□

7. **Réservé aux 5/2.** On s'intéresse maintenant à la série de terme général $v_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \lambda_2^n$.

a. Cette série est-elle convergente ?

Solution. C'est une série géométrique de raison $\lambda_2 \in]0, 1[\cup]-1, 1[$, elle est donc convergente.

□

b. Que vaut $\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$?

Solution. On calcule la somme d'une série géométrique :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_2^k = \frac{\lambda_2^{n+1}}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_2^k = \frac{\lambda_2^{n+1}}{\sqrt{5}(1 - \lambda_2)}.$$

□

Problème

Partie 1 - Une suite de polynômes à coefficients réels

On considère la suite de polynômes $(T_n)_{n \geq 0}$ à coefficients réels définie par

$$T_0(X) = T_1(X) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2T_{n+1} - (1 + X^2)T_n(X).$$

1. Expliciter $T_n(X)$ pour $0 \leq n \leq 5$.

Solution. On sait déjà que $T_0(X) = T_1(X) = 1$ par définition. Ensuite

$$\begin{aligned} T_2(X) &= 2T_1(X) - (1 + X^2)T_0(X) = 2 - 1 - X^2 = 1 - X^2 \\ T_3(X) &= 2T_2(X) - (1 + X^2)T_1(X) = 2 - 2X^2 - 1 - X^2 = 1 - 3X^2 \\ T_4(X) &= 2T_3(X) - (1 + X^2)T_2(X) = 2 - 6X^2 - (1 + X^2)(1 - X^2) = 1 - 6X^2 + X^4 \\ T_5(X) &= 2T_4(X) - (1 + X^2)T_3(X) = 1 - 10X^2 + 5X^4 \end{aligned}$$

□

2. Montrer, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(T_n) = 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ et préciser le coefficient dominant de T_n .
On distinguera les cas n pair et n impair.

Solution. On conjecture que le coefficient dominant de T_n , que l'on note c_n est

$$c_n = \begin{cases} (-1)^{n/2} = (-1)^{n/2} \binom{n}{n}, & \text{si } n \text{ est pair} \\ (-1)^{(n-1)/2} n = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{n-1}, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

ce qui permet en fait d'écrire $c_n = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2\lfloor n/2 \rfloor}$ (même si cette observation n'est pas nécessaire).

La récurrence est alors déjà initialisée. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que

$$\deg(T_{2k}) = \deg(T_{2k+1}) = 2k \quad c_{2k} = (-1)^k, \quad \text{et} \quad c_{2k+1} = (-1)^k(2k+1).$$

✕ On a $T_{2k+2}(X) = 2T_{2k+1}(X) - (1 + X^2)T_{2k}(X)$. Or $\deg(2T_{2k+1}) = 2k$ et $\deg((1 + X^2)T_{2k}(X)) = 2k + 2$. Donc $\deg(T_{2k+2}) = 2k + 2$ et $c_{2k+2} = -c_{2k} = (-1)^{k+1}$.

✕ On alors $T_{2k+3}(X) = 2T_{2k+2}(X) - (1 + X^2)T_{2k+1}(X)$ avec cette fois $\deg(2T_{2k+2}) = 2k+2$ et $\deg((1 + X^2)T_{2k+1}(X)) = 2k + 2$. Le coefficient devant X^{2k+2} dans cette différence vaut

$$2c_{2k+2} - c_{2k+1} = 2(-1)^{k+1} - (-1)^k(2k+1) = (-1)^{k+1}(2 + 2k + 1) = (-1)^{k+1}(2k+3) \neq 0$$

Ainsi, on a bien $\deg(T_{2k+3}) = 2k + 2$ et $c_{2k+3} = (-1)^k(2k+3)$.

La récurrence est terminée. □

3. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient constant de T_n .

Solution. Observons que le coefficient constant de T_n correspond à l'évaluation $T_n(0)$. On peut conjecturer qu'il est toujours égal à 1. La récurrence est déjà initialisée. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $T_{n+1}(0) = T_n(0) = 1$. Alors

$$T_{n+2}(0) = 2T_{n+1}(0) - (1 + 0^2)T_n(0) = 2 - 1 = 1,$$

et la récurrence est terminée. □

On décide de représenter, en **Python**, un polynôme par la liste de ses coefficients. Par exemple, le polynôme nul est représenté par la liste vide `[]`, le polynôme constant 1 est représenté par la liste `[1]` quant au polynôme $2X^3 + X$, il est représenté par la liste `[0, 1, 0, 2]`.

4. a. Écrire une fonction `addition(P, Q)` qui prend en argument deux listes $P = [p_0, p_1, \dots, p_n]$ et $Q = [q_0, q_1, \dots, q_m]$ et qui renvoie la liste R des coefficients du polynôme $\sum_{k=0}^n p_k X^k + \sum_{k=0}^m q_k X^k$.

Solution. On crée une liste de bonne longueur (et il faut savoir lequel des deux polynômes a le plus grand degré pour définir la longueur de la liste finale) et on actualise en faisant la somme des composantes des deux listes pour les composantes d'indices communs. Enfin, on supprime d'éventuels zéros en fin de liste qui pourraient apparaître si les degrés des deux polynômes sont les mêmes.

```
def addition(P, Q):
    n = max(len(P), len(Q))
    R = [0] * n
    for k in range(n):
        if k < len(P):
            R[k] += P[k]
        if k < len(Q):
            R[k] += Q[k]
    while len(R) > 0 and R[-1] == 0:
```

```

    R.pop()
    return R

```

□

- b. Expliquer ce que fait la fonction `mystere`, d'argument une liste $P = [p_0, p_1, \dots, p_n]$, ci-dessous :

```

def mystere(P) :
    Q = [0, 0] + P
    return addition(P, Q)

```

Solution. La concaténation de listes $[0, 0] + P$ décale tout les termes de la liste en ajoutant deux zéros en début de liste. Cela revient à multiplier le polynôme P par X^2 . Enfin, `addition(Q,P)` renvoie alors le polynôme $P + X^2P = (1 + X^2)P$. □

- c. Écrire une fonction `T(n)` d'argument un entier n , et qui renvoie la liste des coefficients du polynôme T_n . Cette fonction utilisera les fonctions `addition` et `mystere` ci-dessus.

Solution. On utilise la relation de récurrence et les fonctions précédentes.

```

def T(n) :
    T0 = [1]
    T1 = [1]

    if n == 0:
        return T0
    if n == 1:
        return T1

    for k in range(n - 1):
        P = [2*a for a in T1]
        Q = [-a for a in mystere(T0)]
        T2 = addition(P, Q)
        T0 = T1
        T1 = T2
    return T1

```

□

Partie 2 - D'autres polynômes

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le polynôme à coefficients complexes $P_n(X) = (1 + iX)^n$. On pose $P_0(X) = 1$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer, sous forme développée, deux polynômes $R_n(X)$ et $S_n(X)$, à coefficients réels, tels que :

$$P_n(X) = R_n(X) + iS_n(X).$$

Solution. On utilise la formule du binôme et une sommation par paquets. Observons que, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$i^k = \begin{cases} (-1)^j, & \text{si } k = 2j \\ i(-1)^j, & \text{si } k = 2j + 1 \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} P_n(X) &= (1 + iX)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k X^k = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} i^k X^k + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k} i^k X^k \\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} (-1)^j X^{2j} + i \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} (-1)^j X^{2j+1} \end{aligned}$$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par unicité de l'écriture algébrique d'un nombre complexe

$$(1 + ix)^n = R_n(x) + iS_n(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} (-1)^j x^{2j} + i \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} (-1)^j x^{2j+1}$$

Ainsi, $R_n(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} (-1)^j x^{2j}$ et $S_n(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} (-1)^j x^{2j+1}$. Ces égalités étant vraies pour une infinité de valeurs, on peut donc conclure que

$$R_n(X) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} (-1)^j X^{2j}, \quad \text{et} \quad S_n(X) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} (-1)^j X^{2j+1}$$

□

6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$R_{n+1}(X) = R_n(X) - X S_n(X), \quad \text{et} \quad S_{n+1}(X) = X R_n(X) + S_n(X).$$

On pourra calculer $(1 + iX)^{n+1}$.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'une part

$$(1 + ix)^{n+1} = R_{n+1}(x) + i S_{n+1}(x)$$

et d'autre part

$$(1 + ix)^n (1 + ix) = (R_n(x) + i S_n(x))(1 + ix) = (R_n(x) - X S_n(x)) + i(x R_n(x) + S_n(X)).$$

Par identification, on obtient

$$R_{n+1}(x) = R_n(x) - X S_n(x), \quad \text{et} \quad S_{n+1}(x) = x R_n(x) + S_n(X).$$

Ces égalités étant vraies pour tout réel x , on obtient bien les relation de récurrence entre les polynômes demandées. □

7. En déduire une relation de récurrence entre $R_{n+2}(X)$, $R_{n+1}(X)$ et $R_n(X)$.

Solution. Il suffit d'injecter. Soit $n \in \mathbb{N}$. On peut écrire :

$$\begin{aligned} R_{n+2}(X) &= R_{n+1}(X) - X S_{n+1}(X) = R_{n+1}(X) - X (X R_n(X) + S_n(X)) \\ &= R_{n+1}(X) - X^2 R_n(X) - X S_n(X) \\ &= R_{n+1}(X) - X^2 R_n(X) + (R_{n+1}(X) - R_n(X)) \end{aligned}$$

Au final, on a :

$$R_{n+2}(X) = 2R_{n+1}(X) - (1 + X^2)R_n(X),$$

ce qui est la même relation de récurrence que celle des polynômes T_n de la Partie 1.... □

8. En vérifiant, pour $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, que $1 + i \tan(\theta) = \frac{e^{i\theta}}{\cos(\theta)}$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad R_n(\tan(\theta)) = \frac{\cos(n\theta)}{\cos^n(\theta)} \quad \text{et} \quad S_n(\tan(\theta)) = \frac{\sin(n\theta)}{\cos^n(\theta)}.$$

Solution. Soit $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On observe bien que

$$\frac{e^{i\theta}}{\cos(\theta)} = \frac{\cos(\theta) + i \sin(\theta)}{\cos(\theta)} = 1 + i \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = 1 + i \tan(\theta).$$

De plus, observons que $R_0 = 1, S_0 = 0$ et que $R_1 = S_1 = 1$.

On procède ensuite par récurrence.

✕ Initialisation. Pour $n = 0$, $R_0(\tan(\theta)) = 1 = \frac{\cos(0)}{\cos^0(\theta)}$ et $S_n(\tan(\theta)) = 0 = \frac{\sin(0)}{\cos^0(\theta)}$.

✕ Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que

$$R_n(\tan(\theta)) = \frac{\cos(n\theta)}{\cos^n(\theta)} \quad \text{et} \quad S_n(\tan(\theta)) = \frac{\sin(n\theta)}{\cos^n(\theta)}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} R_{n+1}(\tan(\theta)) &= R_n(\tan(\theta)) - \tan(\theta) S_n(\tan(\theta)) = \frac{\cos(n\theta)}{\cos^n(\theta)} - \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \times \frac{\sin(n\theta)}{\cos^n(\theta)} \\ &= \frac{\cos(\theta) \cos(n\theta) - \sin(\theta) \sin(n\theta)}{\cos^{n+1}(\theta)} = \frac{\cos((n+1)\theta)}{\cos^{n+1}(\theta)}. \end{aligned}$$

De même

$$S_{n+1}(\tan(\theta)) = \frac{\sin(n\theta) \cos(\theta) + \cos(n\theta) \sin(\theta)}{\cos^{n+1}(\theta)} = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\cos^{n+1}(\theta)}.$$

La récurrence est terminée. □

Dans toute la suite de ce problème on fixe un entier n **pair**.

On note $x_0, x_2, \dots, x_{n-1}$ les racines complexes de R_n comptées avec multiplicité.

9. a. Vérifier que, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a : $\frac{2k+1-n}{n} \in]-1, 1[$.

Solution. Simple vérification.

$$0 \leq k \leq n-1 \implies 1-n \leq 2k+1-n \leq n-1 \implies -1 < -1 + \frac{1}{n} = \frac{1-n}{n} \leq \frac{2k+1-n}{n} \leq \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1.$$

□

- b. Montrer que, quitte à ré-indexer les racines, on a :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad x_k = \tan\left(\frac{(2k+1-n)\pi}{2n}\right).$$

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précède, en notant pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\theta_k = \frac{(2k+1-n)\pi}{2n} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$R_n(\tan(\theta_k)) = \frac{\cos(n\theta_k)}{\cos^n(\theta_k)} = \frac{\cos\left((2k+1-n)\frac{\pi}{2}\right)}{\cos^n(\theta_k)} = 0$$

car n étant supposé pair, $2k+1-n$ est toujours impair. Ainsi, $\tan(\theta_k)$ est racine de R_n .

Or, les n angles θ_k (pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$) sont deux à deux distincts et éléments de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, intervalle où la fonction $\tan$ est bijective (donc injective). Les nombres $\tan(\theta_k)$ sont donc deux à deux distincts et forment donc n racines (distinctes donc simples) de R_n qui est de degré $2 \times \lfloor n/2 \rfloor = n$. On les a toutes. Quitte à ré-indexer, on peut écrire que

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad x_k = \tan(\theta_k).$$

□

10. Dédurre des Questions 2., 7. et 9.b. que :

$$T_n(X) = (-1)^{\frac{n}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \tan\left(\frac{(2k+1-n)\pi}{2n}\right) \right).$$

où T_n désigne le polynôme de la **Partie 1**.

Solution. On observe que $R_0 = T_0 = R_1 = T_1 = 1$ et que la relation de récurrence vérifiée par R_n est la même que celle vérifiée par T_n . Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = R_n$. On peut donc factoriser T_n (en factorisant R_n dont on connaît les racines) et on connaît le coefficient dominant de T_n qui vaut (car n est pair) $(-1)^{n/2}$. Au final, on a bien

$$T_n(X) = (-1)^{\frac{n}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \tan\left(\frac{(2k+1-n)\pi}{2n}\right) \right).$$

□

11. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \tan\left(\frac{(2k+1-n)\pi}{2n}\right) = 0.$$

Solution. D'après les relations coefficients/racines, en remarquant que le coefficient de T_n de degré $n/2 - 1$ est nul (il n'y a que des puissances paires dans T_n), on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k = -\frac{0}{c_n} = 0,$$

ce qui est bien la formule demandée. □

12. Que vaut le produit : $\prod_{k=0}^{n-1} \tan\left(\frac{(2k+1-n)\pi}{2n}\right)$?

Solution. Toujours d'après les relations coefficients/racines, on a

$$\prod_{k=0}^{n-1} x_k = (-1)^{\deg(T_n)} \frac{T_n(0)}{c_n} = \frac{(-1)^{n/2} \times 1}{(-1)^{n/2}} = 1.$$

□

13. a. Montrer que, pour tout réel a tel que $R_n(a) \neq 0$,

$$\frac{R'_n(a)}{R_n(a)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a - \tan\left(\frac{(2k+1-n)\pi}{2n}\right)}$$

Solution. On dérive un produit de n termes. Chaque $X - x_j$ se dérive en le polynôme constant égal à 1 mais il reste à chaque fois les $n - 1$ autres termes en facteur. On a donc

$$R'_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{j \neq k} (X - x_j)$$

Si $R_n(a) \neq 0$, en divisant par le produit, il ne reste qu'un terme au dénominateur à chaque fois.

$$\frac{R'_n(a)}{R_n(a)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\prod_{j \neq k} (a - x_j)}{\prod_j (a - x_j)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a - x_k}.$$

□

b. En déduire, pour $\theta \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$, une expression de

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\tan(\theta) - \tan\left(\frac{(2k+1-n)\pi}{2n}\right)}$$

en fonction de n et θ .

Solution. Posons $g_n : \theta \mapsto R_n \circ \tan(\theta)$ fonction dérivable comme composée de telles fonctions. On a

$$g'_n(\theta) = R'_n(\theta) \times \tan'(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)} R'_n(\tan(\theta)).$$

Or,

$$g_n(\theta) = \frac{\cos(n\theta)}{\cos^n(\theta)} \text{ et donc } g'_n(\theta) = \frac{-n \sin(n\theta) \cos^n(\theta) + n \cos^{n-1}(\theta) \sin(\theta) \cos(n\theta)}{\cos^{2n}(\theta)}.$$

Il suit que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\tan(\theta) - \tan\left(\frac{(2k+1-n)\pi}{2n}\right)} &= \frac{R'_n(\tan(\theta))}{R_n(\tan(\theta))} \\ &= \cos^2(\theta) \times \frac{-n \sin(n\theta) \cos^n(\theta) + n \cos^{n-1}(\theta) \sin(\theta) \cos(n\theta)}{\cos^{2n}(\theta)} \times \frac{\cos^n(\theta)}{\cos(n\theta)} \\ &= n (\cos(\theta) \sin(\theta) - \cos^2(\theta) \tan(n\theta)) \end{aligned}$$

□

Partie 3 - Construction (via les sommets) d'un polygone régulier

Dans cette partie, l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle d'un repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1, Δ_0 la droite d'équation $\operatorname{Re}(z) = 0$, et Δ_1 la droite d'équation $\operatorname{Re}(z) = 1$.

On introduit la fonction $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right).$$

On rappelle que n désigne un entier naturel pair.

On définit, pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, les points M_k de coordonnées $\psi(x_k)$, où les x_k sont les racines du polynôme R_n introduit dans la partie précédente, et on note z_k l'afixe du point M_k .

14. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point de coordonnée $\psi(t)$ est un élément de $\mathcal{C} \setminus \Delta_0$, puis, montrer que :

$$\forall \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \quad \psi(\tan(\theta)) = (\cos(\theta), \sin(\theta)).$$

Solution. Pour commencer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la partie réelle de l'affixe du point de coordonnée $\psi(t)$ est non nulle, donc le point ne peut pas appartenir Δ_0 . Ensuite, on a

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \right)^2 + \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right)^2 = \frac{1+t^2}{1+t^2} = 1$$

et le point de coordonnées $\psi(t)$ vérifie bien l'équation de $\mathcal{C}$. Enfin, pour $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, comme $1 + \tan^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)}$ et, comme $\cos(\theta) \geq 0$ sur l'intervalle, $\sqrt{\cos^2(\theta)} = \cos(\theta)$. Il suit :

$$\psi(\tan(\theta)) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\theta)}}, \frac{\tan(\theta)}{\sqrt{1+\tan^2(\theta)}} \right) = (\cos(\theta), \sin(\theta)).$$

□

15. Justifier que ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Expliciter le développement limité à l'ordre 3 en 0 de ψ .

Solution. Les deux fonctions qui définissent les composantes de ψ sont toutes deux de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme quotient de composées de fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^\infty$. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1+t^2 > 0$ et $u \mapsto \sqrt{u}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En utilisant le DL usuel au voisinage de 0,

$$\frac{1}{\sqrt{1+u}} = (1+u)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}u - \frac{3}{8}u^2 + o(u^2),$$

on a

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^3), \quad \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = t - \frac{1}{2}t^3 + o(t^3)$$

et donc

$$\psi(t) = (1, 0) + (0, 1)t + \left(-\frac{1}{2}, 0\right)t^2 + \left(0, -\frac{1}{2}\right)t^3 + o(t^3).$$

□

16. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^{2n} = -1$.

Solution. On commence par écrire $-1 = e^{i\pi}$. Une première solution est obtenue avec $z_0 = e^{\frac{i\pi}{2n}}$. Il suffit, pour obtenir les $2n-1$ autres solutions de multiplier z_0 par les racines $2n$ -ième de l'unité. Notant $\mathcal{S}_{2n}$ l'ensemble des solutions de l'équation, on a :

$$\mathcal{S} = \left\{ e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}} : 0 \leq k \leq 2n-1 \right\}.$$

□

17. **Construction à la règle et au compas.** Dans cette question, on ne peut utiliser qu'une règle **non graduée**, un compas et le quadrillage fourni.

On note, pour $t \in \mathbb{R}$, A_t le point de coordonnées $\psi(t)$ et Q_t le point d'intersection des droite (OA_t) et Δ_1 .

On rappelle que pour construire la bissectrice d'un angle $\widehat{OAB}$, on commence par placer un point M sur le segment $[OA]$ puis on reporte la distance pour construire N sur $[OB]$ tel que $OM = ON$ (N est alors le symétrique de M par rapport à la bissectrice) et la bissectrice cherchée est alors la médiatrice du segment $[MN]$, c'est à dire l'ensemble des points équidistants de M et N .

- a. Construire, sur le quadrillage de l'**Annexe 2** (échelle : 10 grands carreaux pour une unité), le point P_0 d'affixe $e^{\frac{i\pi}{8}}$.

Solution. Le point cherché sera l'intersection du cercle unité et de la bissectrice de $\pi/4$. On place donc $e^{\frac{i\pi}{4}}$ sur le cercle (c'est le point d'intersection de $y = x$ avec le cercle). On prend deux points (équidistants de O avec notre compas) respectivement sur $y = x$ et sur l'axe des abscisses. La bissectrice cherchée est la médiatrice du segment formé par les deux points susmentionnés.

On sait tracer une médiatrice avec notre compas : on trace deux cercles de même rayon et de centre les deux points précédents. Ils se rencontrent en deux points et la droite passant par ces deux points est la médiatrice. □

- b. Placer ensuite, à l'aide du compas, l'ensemble des points P_k dont les affixes sont les solutions de l'équation $z^8 = -1$. On expliquera la méthode de construction.

Solution. Il s'agit de placer les points dont les affixes sont les solutions de $z^8 = -1$. Le point P_0 précédemment placé est une solution de cette équation. On a les autres points en multipliant l'affixe de P_0 par les racines 8-ème de l'unité, ou encore en opérant une rotation d'angle $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$.

Toutes les racines de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier et donc régulièrement espacées.

Il suffit donc de reporter la distance entre le point d'affixe 1 et $e^{\frac{i\pi}{4}}$ huit fois à partir de P_0 □

- c. Déterminer, pour $t \in \mathbb{R}$, les coordonnées de Q_t .

Solution. La droite (OA_t) a pour équation

$$y = \frac{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}x = tx.$$

Elle intersecte donc Δ_1 au point Q_t de coordonnées $(1, t)$. □

- d. En déduire, pour $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, une valeur approchée à 10^{-2} de x_k racine de T_4 introduit dans la partie précédente.

Solution. Notons x_0, x_1, x_2 et x_3 les racines de T_4 . On a, par tout ce qui précède, que

$$\psi(x_k) = \psi(\tan(\theta_k)) = (\cos(\theta_k), \sin(\theta_k))$$

et donc $M_0 = P_6, M_1 = P_7, M_2 = P_0, M_3 = P_1$. Le point d'intersection de chaque droite (OP_k) avec Δ_1 a donc pour coordonnées $(1, x_k)$, ce qui permet d'obtenir une valeur approchée de x_k en lisant sur le quadrillage la valeur de l'ordonnée de ce point d'intersection.

On trouve

$$x_0 \simeq -2.41, \quad x_1 \simeq -0.41, x_2 \simeq 0.41, \quad x_3 \simeq 2.41.$$

□

