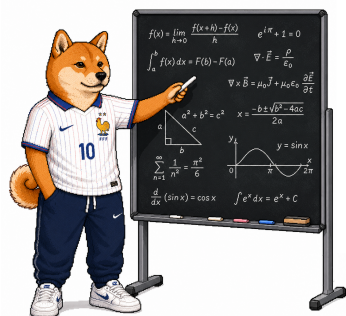




Semaine de colle n°1

Du Lundi 7 Septembre au Vendredi 11 Septembre
Planche n°1

Question de cours

Factoriser, dans $\mathbb{C}[X]$, $X^4 + 4X^2 + 16$.

Exercice 1 - D'après Oral Math II 2023

Soient p et q des nombres complexes. On cherche $\alpha, \lambda, \beta, \mu$ complexes tels que

$$X^3 + pX + q = \alpha(X + \lambda)^3 + \beta(X + \mu)^3.$$

1. Trouver les relations entre $\alpha, \lambda, \beta, \mu$ et p, q .
2. Exprimer α et β en fonction de λ et μ .
3. En déduire $\lambda + \mu$ et $\lambda\mu$ en fonction de p et q . Peut-on en déduire λ et μ ?
4. Résoudre $z^3 - 3z - \frac{5}{2} = 0$ en utilisant ce qui précède.

Exercice 2

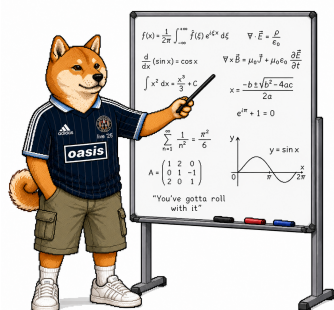
Les questions ci-dessous sont indépendantes.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $\cos(x) = \sqrt{3}\sin(x) + 1$.

b. $\cos(x) + \sin(x) = 1 + \tan(x)$.

2. Écrire une fonction `test_sous_liste` qui prend en argument deux listes L et M et qui renvoie -1 si M n'est pas une sous-liste de L et le plus petit indice i tel que M est la sous-liste de L commençant à l'indice i sinon.



Semaine de colle n°1

Du Lundi 7 Septembre au Vendredi 11 Septembre
Planche n°1

Question de cours

Calculer, pour $\theta \in \mathbb{R}$, la somme $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta)$.

Exercice 1

- Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ admettant une racine complexe z dont l'ordre de multiplicité est supérieur ou égal à 2.
 - Re-démontrer que le conjugué $\bar{z}$ de z est aussi une racine de P .
 - Démontrer que, si z n'est pas un nombre réel, alors il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que
$$P = (X^2 - 2\operatorname{Re}(z)X + |z|^2)^2 Q.$$
 - En déduire que z est racine du polynôme dérivé P' de P .
- Pour tout entier $n \geq 2$, on note P_n le polynôme $X^{2n} - 2nX + 1$ de $\mathbb{R}[X]$.
 - Déterminer les racines complexes du polynôme dérivé P'_n .
 - Combien le polynôme P_n admet-il de racines complexes?

Pour tout entier $n \geq 2$, on note f_n la fonction réelle définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^{2n} - 2nx + 1.$$

- Combien l'équation $f_n(x) = 0$ admet-elle de solutions réelles?
- On note u_n la plus grande des solutions réelles de l'équation précédente.
Soit $\varepsilon > 0$. Que peut-on dire du signe de $f_n(1 + \varepsilon)$? En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ converge vers 1.

Exercice 2

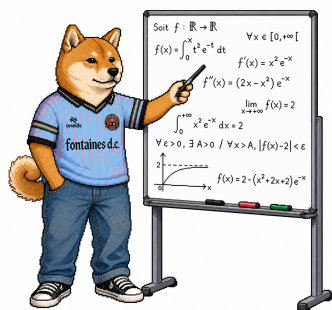
Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{0 \leq i < j \leq n} \binom{j}{i} 2^i$.

- Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ l'équation

$$\sqrt{3} \cos(x) - \sin(x) = m$$

admet-elle des solutions? Les déterminer lorsque $m = \sqrt{2}$.



Semaine de colle n°1

Du Lundi 7 Septembre au Vendredi 11 Septembre
Planche n°1

Question de cours

Exprimer $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.

Exercice 1 - D'après Oral Math II 2024

On considère le polynôme P défini par : $P(X) = X^3 - X^2 + 1$.

1. Montrer que P admet une unique racine réelle.
2. Soit $Q(X) = X^5 + X + 1$. Montrer que P divise Q . Factoriser Q comme produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Soit $R(X) = X^5 + X^4 + 1$. Établir une relation entre R et Q . Factoriser R comme produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1.
 - a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Transformer $\cos(x) + 2\cos(2x) + \cos(3x)$ en produit.
 - b. Résoudre l'équation $\cos(x) + 2\cos(2x) + \cos(3x) = 0$ d'inconnue $x \in]-\pi, \pi]$.
2. Soit n un entier naturel impair et non multiple de 5.
On **admet** qu'un de ses multiples, noté N , s'écrit en base 10 avec seulement le chiffre 1 (il est de la forme $111 \dots 111$).
Écrire une fonction `QueDesUns` d'un argument n qui renvoie le premier multiple N de n ne s'écrivant qu'avec des 1, si n est impair non multiple de 5, et `'erreur'` sinon.