

Question de Cours. Formules d'addition ($\cos(a+b)$, $\sin(a+b)$, $\tan(a+b)$) et formules de duplication ($\cos(2a)$, $\sin(2a)$).

Exercice 1 (Application directe). Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. On considère l'équation polynomiale en $Z \in \mathbb{C}$:

$$Z^2 - 2e^{i\theta} \cos(\theta)Z + e^{2i\theta} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 0.$$

1. Résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$. Écrire les solutions Z_1 et Z_2 sous forme exponentielle.
2. Exprimer le produit $P = Z_1 Z_2$ sous forme condensée.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme double $S_n = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} \operatorname{Re}(Z_1)^j \operatorname{Re}(Z_2)^k$.

Exercice 2 (Approfondissement). Soit $P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme scindé à racines simples $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$.

1. Montrer la décomposition en éléments simples de $\frac{P'(X)}{P(X)}$ dans $\mathbb{C}(X)$.
2. En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) \neq 0$ et $P'(z) = 0$, z appartient à l'enveloppe convexe des racines de P , c'est-à-dire qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ et $z = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i$ (Théorème de Gauss-Lucas).

Question de Cours. Formules d'addition : $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$, $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.

Duplication : $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$, $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$.

Correction Exercice 1.

1. Le discriminant réduit de l'équation du second degré est :

$$\Delta' = (e^{i\theta} \cos \theta)^2 - (e^{2i\theta} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = e^{2i\theta} \cos^2 \theta - e^{2i\theta} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = -\sin^2 \theta = (i \sin \theta)^2.$$

Les solutions sont $Z = e^{i\theta} \cos \theta \pm i \sin \theta$. Ainsi $Z_1 = e^{i\theta} \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}(\cos \theta + i e^{-i\theta} \sin \theta) = e^{i\theta}(\cos \theta + \sin \theta \sin \theta + i \dots) = e^{2i\theta}$ et $Z_2 = e^{i\theta}(\cos \theta - i \sin \theta) = e^{i\theta} e^{-i\theta} = 1$.

2. Le produit vaut $P = Z_1 Z_2 = e^{2i\theta} \cdot 1 = e^{2i\theta}$.

3. On a $\operatorname{Re}(Z_1) = \cos(2\theta)$ et $\operatorname{Re}(Z_2) = 1$. Soit $a = \cos(2\theta)$. $S_n = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k a^j = \sum_{k=1}^n a \frac{1-a^k}{1-a} = \frac{a}{1-a} (n - \sum_{k=1}^n a^k) = \frac{a}{1-a} \left(n - a \frac{1-a^n}{1-a} \right) = \frac{na(1-a) - a^2(1-a^n)}{(1-a)^2}$ (si $a \neq 1$).

Correction Exercice 2.

1. $P(X) = \prod_{i=1}^n (X - z_i)$. En dérivant sous forme logarithmique : $P'(X) = \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} (X - z_j)$. En divisant par $P(X)$, on obtient $\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{X - z_i}$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) \neq 0$ et $P'(z) = 0$. Alors $\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{z - z_i} = 0$. En prenant le conjugué : $\sum_{i=1}^n \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_i} = 0 \iff \sum_{i=1}^n \frac{z - z_i}{|z - z_i|^2} = 0$. Soit $\mu_i = \frac{1}{|z - z_i|^2} > 0$. On a $\sum_{i=1}^n \mu_i (z - z_i) = 0 \iff (\sum_{i=1}^n \mu_i) z = \sum_{i=1}^n \mu_i z_i$. En posant $\lambda_i = \frac{\mu_i}{\sum_{j=1}^n \mu_j} \in]0, 1[$, on a bien $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ et $z = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i$.

Question de Cours. Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.

Exercice 1 (Application directe).

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, simplifier le produit $P_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} \cos(2^k x)$.
(Indication : multiplier par $\sin(x)$ et utiliser les formules de duplication.)
2. En déduire la valeur de $\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)$.
3. Déterminer la limite de $P_n\left(\frac{x}{2^n}\right)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
4. Calculer la somme double $T_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 2^{i+j}$.

Exercice 2 (Approfondissement). Soit $n \geq 2$ un entier. On note $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$ les racines n -ièmes de l'unité.

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, calculer le produit $\prod_{k=0}^{n-1} (z - \omega_k)$.
2. En déduire la valeur du produit $\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$.
3. Montrer que $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Question de Cours. $(a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}$. Par changement d'indice $j = k+1$ dans la première somme : $\sum_{j=1}^n a^j b^{n-j} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} = a^n b^0 - a^0 b^n = a^n - b^n$ par télescopage.

Correction Exercice 1.

1. On sait que $\sin(2y) = 2 \sin(y) \cos(y)$, d'où $\cos(y) = \frac{\sin(2y)}{2 \sin(y)}$. Ainsi : $P_n(x) \sin(x) = \sin(x) \cos(x) \cos(2x) \dots \cos(2^{n-1}x) = \frac{1}{2} \sin(2x) \cos(2x) \dots = \frac{1}{2^n} \sin(2^n x)$. Puisque $x \neq 2k\pi$, $\sin(x) \neq 0$, donc $P_n(x) = \frac{\sin(2^n x)}{2^n \sin(x)}$.
2. Pour $x = \frac{\pi}{2^{n+1}}$, $2^n x = \frac{\pi}{2}$. Donc $\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right) = P_n\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{\sin(\pi/2)}{2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} = \frac{1}{2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}$.
3. $P_n\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{\sin(x)}{2^n \sin(x/2^n)}$. Comme $2^n \sin(x/2^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$, la limite est $\frac{\sin(x)}{x}$.
4. $T_n = \sum_{j=1}^n 2^j \sum_{i=1}^j 2^i = \sum_{j=1}^n 2^j \cdot 2 \frac{2^j - 1}{2 - 1} = 2 \sum_{j=1}^n (4^j - 2^j) = 2 \left(4 \frac{4^n - 1}{3} - 2(2^n - 1)\right) = \frac{8(4^n - 1)}{3} - 4(2^n - 1)$.

Correction Exercice 2.

1. Les ω_k sont les n racines distinctes du polynôme $X^n - 1$. Le polynôme étant unitaire de degré n , on a $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k)$. Donc $\prod_{k=0}^{n-1} (z - \omega_k) = z^n - 1$.
2. On a $(z - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega_k) = z^n - 1 \implies \prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega_k) = \frac{z^n - 1}{z - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} z^k$. En évaluant en $z = 1$, on obtient $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega_k) = n$.
3. $1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} = -e^{\frac{ik\pi}{n}} \left(e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}} \right) = -2ie^{\frac{ik\pi}{n}} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 2e^{i\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2}\right)} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. En prenant le module : $|1 - \omega_k| = 2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ car $\frac{k\pi}{n} \in]0, \pi[\implies \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) > 0$. Donc $n = \left| \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega_k) \right| = \prod_{k=1}^{n-1} 2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. D'où $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Question de Cours. Calculer, pour $\theta \in \mathbb{R}$, la somme $S = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta)$.

Exercice 1 (Application directe).

1. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P(X) = X^4 + 4X^2 + 16$.
2. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ les quatre racines complexes de $P(X)$. Calculer la somme $\Sigma = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \alpha_i \alpha_j$ et le produit $\Pi = \prod_{i=1}^4 \alpha_i$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer le produit $Q_n = \prod_{k=0}^n \left(1 + e^{i \frac{k\pi}{n}}\right)$.

Exercice 2 (Approfondissement). Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ trois nombres complexes distincts.

1. Montrer que les points d'affixes a, b, c forment un triangle équilatéral dans le plan complexe si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.
2. En déduire que a, b, c forment un triangle équilatéral si et seulement si $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 0$.

Question de Cours. $S = \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ik\theta} \right) = \operatorname{Im} \left((1 + e^{i\theta})^n \right)$. Or $1 + e^{i\theta} = 2 \cos(\theta/2) e^{i\theta/2}$. Donc $(1 + e^{i\theta})^n = 2^n \cos^n(\theta/2) e^{in\theta/2}$. D'où $S = 2^n \cos^n(\theta/2) \sin(n\theta/2)$.

Correction Exercice 1.

1. $P(X) = X^4 + 8X^2 + 16 - 4X^2 = (X^2 + 4)^2 - (2X)^2 = (X^2 - 2X + 4)(X^2 + 2X + 4)$. Les discriminants des deux facteurs sont $\Delta = -12 < 0$, donc ces facteurs sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Par les relations Viète-racines sur $P(X) = X^4 + 0X^3 + 4X^2 + 0X + 16$: $\Sigma = \sigma_2 = 4$ et $\Pi = \sigma_4 = 16$.
3. $1 + e^{i \frac{k\pi}{n}} = 2 \cos \left(\frac{k\pi}{2n} \right) e^{i \frac{k\pi}{2n}}$. Pour $k = n$, $1 + e^{i\pi} = 0$, donc $Q_n = 0$.

Correction Exercice 2.

1. A, B, C forment un triangle équilatéral $\iff C$ s'obtient par rotation de centre A et d'angle $\pm\pi/3$ à partir de B . Ceci équivaut à $\frac{c-a}{b-a} = e^{\pm i\pi/3} \iff \frac{c-a}{b-a}$ est racine de $X^2 - X + 1 = 0$. Donc $\left(\frac{c-a}{b-a} \right)^2 - \frac{c-a}{b-a} + 1 = 0 \iff (c-a)^2 - (c-a)(b-a) + (b-a)^2 = 0$. En développant : $c^2 - 2ac + a^2 - (bc - ab - ac + a^2) + b^2 - 2ab + a^2 = 0 \iff a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$.
2. $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = \frac{(b-c)(c-a) + (a-b)(c-a) + (a-b)(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$. Le numérateur vaut $ab + bc + ca - a^2 - b^2 - c^2$. Donc $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 0 \iff a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$, ce qui équivaut bien à ce que le triangle soit équilatéral.