

A] Question de cours :

Enoncer les formules d'addition et de duplication.

Démontrer la formule d'addition de $\tan(a+b)$ et celles de duplication du cosinus.

Exercices :

1) En écrivant $\binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}$ sous la forme du produit de deux autres coefficients binomiaux, prouver que : $\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}$

2) Soit n un entier naturel. Calculer : $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)^2$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0; 4\pi[$ l'équation : $\cos^2(2x) + \frac{5}{2} \cos(2x) - \frac{3}{2} = 0$

4) Exprimer le plus simplement possible la somme : $S = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 5^k (1-2X)^{n-k} X^k$

5)

Implémenter une fonction `elt` qui prend en entrée une liste L et qui renvoie la liste des éléments contenu dans L sans répétition. Par exemple, `elt([1,1,2,1,1,3,3])` doit renvoyer `[1,2,3]`. On pourra utiliser l'instruction `in` qui teste l'appartenance d'un élément à une liste.

B] Question de cours :

Donner et démontrer l'égalité de Bernoulli

Exercices :

1) a) Factoriser sur $\mathbb{C}$ le polynôme $P = (X+1)^n - e^{2ina}$, où a est un réel.

b) En déduire : $\prod_{k=0}^{n-1} \sin(a + \frac{k\pi}{n})$. Que vaut $\prod_{k=0}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{n})$?

2) Soit n un entier naturel. Calculer : $\sum_{i+j=n} i j^2$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\cos(x) + \cos(2x) = 0$

4) Calculer $\sum_{k=0}^n (2 \cdot 3^k - 4)$

Soit $n \geq 2$. Calculer $\sum_{k=2}^n \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$.

5)

Implémenter une fonction `doublon` qui prend en entrée deux listes et détermine quels sont les termes présents dans ces deux listes : `doublon(L1,L2)` renvoie la liste des couples (i,j) tels que $L1[i]=L2[j]$.

C] **Question de cours :**

Exprimer $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.

Exercices :

1) a) Soit $(n,p) \in \mathbb{N}$, avec $0 \leq p \leq n$. Montrer que : $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$

b) Que donne la formule précédente si on fixe : $p = 1$?

c) En fixant $p = 2$, en déduire la valeur de $S = \sum_{k=1}^n k^2$.

d) Après avoir simplifier $\binom{k+1}{3}$, trouver la valeur de $T = \sum_{k=1}^n k^3$.

2) Soit n un entier naturel. Calculer : $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i^2}{j}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin(x/2) + \sin(2x) = 0$

4) Calculer : $S = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$

5)

On souhaite déterminer la valuation 2-adique d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire le plus grand entier p tel que 2^p divise n .

1. Déterminer, à la main, la valuation 2-adique des entiers allant de 1 à 10.
2. Écrire une fonction **valuation** utilisant une boucle **while** qui prend en entrée un entier **n** et renvoie sa valuation 2-adique.