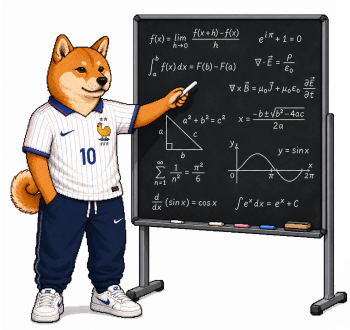
Mathématiques PT. 2026 - 2027

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Semaine de colle n°7

Du Lundi 2 Novembre au Vendredi 6 Novembre
Planche n°1

Question de cours

Étudier et tracer la courbe paramétrée par $M : t \mapsto (\sin(2t), \sin(3t))$.

Exercice 1 - Mines-Télécom 2025

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Pour $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $\varphi(M) = AM$.

1. Montrer que φ induit un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminer la matrice Φ de φ dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Déterminer le rang, l'image et le noyau de φ.

Exercice 2

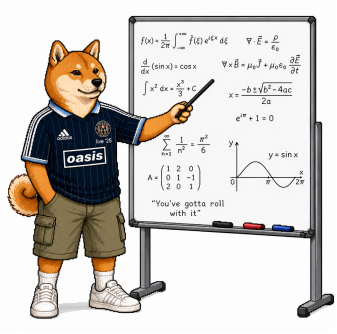
Soit $N \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente d'ordre 2. Quel peut-être le rang de N? Montrer que, si $\mathrm{rg}(N) = 1$, alors N est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Que dire si $\mathrm{rg}(N) = 2$?

Mathématiques PT. 2026 - 2027

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Semaine de colle n°7

Du Lundi 2 Novembre au Vendredi 6 Novembre
Planche n°2

Question de cours

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et p une projection de E. Montrer que $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

Exercice 1 - Mines-Telécom 2025

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \\ 1/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer, pour $k \in \mathbb{N}$, A^k.

2. Même question avec $A = \left(\dfrac{i!}{j!}\right)_{0 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Exercice 2

Soit $\alpha > 0$ fixé.
On considère les fonctions f_1 et f_2, définie sur $\mathbb{R}$, par

$$f_1(x) = e^{\alpha x}, \qquad f_2(x) = xe^{\alpha x},$$

on note E l'espace vectoriel $E = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ et Δ l'endomorphisme de E défini par $\Delta : g \longmapsto g'$.

1. Vérifier que (f_1, f_2) est libre et forme bien une base de E.
2. Quelle est la matrice, que l'on notera A, de Δ dans cette base ? Δ est-il un automorphisme?
3. Calculer A^2 puis A^3. Conjecturer une formule pour A^n (pour $n \in \mathbb{N}^*$) que l'on démontrera par récurrence.
4. En déduire les expression de $f_1^{(n)}(x)$ et $f_2^{(n)}(x)$.

Exercice 3

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E_{i,j}$ les matrices élémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (avec $1 \leq i, j \leq n$).

1. Expliciter, pour $i, j, k, \ell \in [\![1, n]\!]$, le produit $E_{i,j}E_{k,\ell}$.

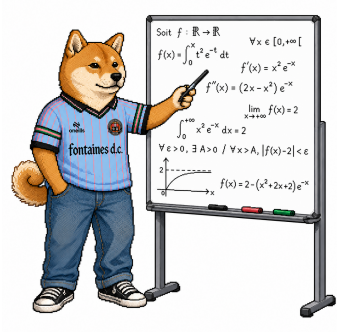
2. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ une forme linéaire telle que

$$\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \qquad \varphi(AB) = \varphi(BA).$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda \mathrm{Tr}$.

Mathématiques PT. 2026 - 2027

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Semaine de colle n°7

Du Lundi 2 Novembre au Vendredi 6 Novembre
Planche n°3

Question de cours

Déterminer, selon la valeurs de $a \in \mathbb{R}$ et sans calcul, l'image et le noyau de l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 1

1. Soient f, g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés aux matrices

$$P = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que f est une projection vectorielle et g une symétrie vectorielle.
Déterminer leurs caractéristiques géométriques.

2. On considère dans $\mathbb{R}^3$ le plan $\mathcal{P}$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équations cartésiennes respectives :

$$\mathcal{P} : x + y + z = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{D} : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}.$$

Déterminer dans la base canonique :

a. La matrice de la projection sur $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{D}$.
b. La matrice de la symétrie par rapport à $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{D}$.

Exercice 2 - Oral Math I 2021

Soient deux polynômes complexes $A = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $B = b_0 + b_1X + b_2X^2$, φ définie de $\mathbb{C}_1[X] \times \mathbb{C}_1[X]$ dans $\mathbb{C}_3[X]$ par $\varphi(P, Q) = PA + QB$ et $\mathcal{B} = ((1, 0); (X, 0); (0, 1); (0, X))$.

1. Montrer que φ est linéaire et que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{C}_1[X] \times \mathbb{C}_1[X]$.

2. Écrire la matrice M de φ dans la base $\mathcal{B}$ au départ et la base canonique à l'arrivée.