Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2026/2027

Semaine 7

Courbes paramétrées – Matrices

**Question de cours.** On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}' = (X^2, X(X-2), (X-2)^2)$ une autre base de $\mathbb{R}_2[X]$.

- Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
- Après un pivot de Gauss simultané, exprimer les coordonnées d'un polynôme $Q = a + bX + cX^2$ dans $\mathcal{B}'$.

**Exercice 1.** On note

- $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$,
- $\mathcal{D}$ la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\varepsilon_1 = e_1 + 3e_2 - e_3$,
- et $\mathcal{P}$ le plan vectoriel engendré par $\varepsilon_2 = e_1 - e_3$ et $\varepsilon_3 = 2e_1 - e_2$.

Déterminer la matrice, dans la base B, du projecteur sur $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{D}$.

**Exercice 2.** On considère le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Étant donné $t \in \mathbb{R}$ et $A_t$ le point de $\mathcal{C}$ de paramètre $t$, on note :

- $P_t$ le projeté orthogonal de $A_t$ sur l'axe $(Ox)$ ;
- $Q_t$ le projeté orthogonal de $A_t$ sur l'axe $(Oy)$) ;
- $\mathcal{D}_t$ la droite $(P_tQ_t)$.

Déterminer l'enveloppe de la famille de droites $(\mathcal{D}_t)_{t\in\mathbb{R}}$.

# Élements de correction

**Exercice 1.** On note $u$ ce projecteur.

- On a clairement $\mathrm{M}(u,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{P}(\mathrm{B},\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Il faut donc calculer $\mathrm{M}(u,\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{B},\varepsilon)\cdot\mathrm{M}(u,\varepsilon)\cdot\mathrm{P}(\mathrm{B},\varepsilon)^{-1}$.
- Pour calculer l'inverse de P, on peut mettre en œuvre l'algorithme du pivot. On peut aussi exprimer les $e_i$ en fonction des $\varepsilon_i$ : puisque $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 3e_2$, on déduit $e_2 = \frac{1}{3}\varepsilon_1 - \frac{1}{3}\varepsilon_2$, puis $e_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_3 + e_2) = \frac{1}{6}\varepsilon_1 - \frac{1}{6}\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_3$ et $e_3 = e_1 - \varepsilon_2 = \frac{1}{6}\varepsilon_1 - \frac{7}{6}\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_3$. Ainsi, $\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. D'où, $\mathrm{M}(u,\mathrm{B}) = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}$.
- Au lieu du calcul matriciel $\mathrm{M}(u,\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{B},\varepsilon)\cdot\mathrm{M}(u,\varepsilon)\cdot\mathrm{P}(\mathrm{B},\varepsilon)^{-1}$, on peut aussi calculer successivement $p(e_1) = p(\frac{1}{6}\varepsilon_1 - \frac{1}{6}\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_3) = -\frac{1}{6}\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_3 = -\frac{1}{6}(e_1 - e_3) + \frac{1}{2}(2e_1 - e_2) = \frac{5}{6}e_1 - \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{6}e_3$, et ainsi de suite.

**Exercice 2.**
Avec $\mathrm{A}(\cos t;\sin t)$ et la paramétrisation $\mathcal{D}_t : \mathrm{P}_t + \lambda\overrightarrow{\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t}, t\in\mathbb{R}$, on cherche une courbe $\Gamma$ : $\mathrm{M}(t) = \mathrm{P}_t + \lambda(t)\vec{u}(t)$ (où $\vec{u}(t) = \overrightarrow{\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t}$).
On veut avoir $\frac{\overrightarrow{\mathrm{dM}}}{\mathrm{d}t}(t)$ colinéaire à $\vec{u}(t)$, donc un déterminant nul, et cette condition fournit $\lambda(t) = \sin^2(t)$.
On en conclut que $\Gamma$ admet pour représentation paramétrique

$$\mathrm{M}(t) = \begin{cases} x(t) = \cos(t) - \sin^2(t)\cos(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}, \ t\in\mathbb{R}$$

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2026/2027

Semaine 7

Courbes paramétrées – Matrices

**Question de cours.** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Calculer $A^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Que peut-on dire de la formule si $n \in \mathbb{Z}$ ?

**Exercice 1.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.
On pose $u_1 = e_1$ et, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $u_k = \sum_{i=1}^{k} a^{k-i} e_i$.
On note $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de la famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ dans la base canonique.

1. Démontrer que P est inversible et calculer $P^{-1}$.
2. En déduire que la famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base de E.

**Exercice 2.** Déterminer l'enveloppe de la famille des droites $\mathcal{D}_t$ définies par :

$$x - y\sin(t) - \cos(t) = 0, \quad t \in [0, 2\pi]$$

# Élements de correction

**Question de cours.**

On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et on établit que le polynôme $P = X^2 - 5X + 4$ annule A.

Pour $n \in \mathbb{N}$, la division euclidienne de $X^n$ par P s'écrit sous la forme $X^n = PQ + a_nX + b_n$, avec $Q \in \mathbb{R}[X]$. On détermine les coefficients $a_n$ et $b_n$ en évaluant $X^n$ en 1 et 4, qui sont les racines de P :

$\begin{cases} a_n + b_n = 1 \\ 4a_n + b_n = 4^n \end{cases} \implies a_n = \frac{4^n-1}{3}$ et $b_n = \frac{4-4^n}{3}$. Donc $A^n = \frac{4^n-1}{3}A + \frac{4-4^n}{3}I$.

Si on note $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1, on a $A = I + J$ et l'expression précédente se simplifie en $A^n = I + \frac{4^n-1}{3}J$.

Puisque $A^n \times \left(I + \frac{4^{-n}-1}{3}J\right) = I^2 + \frac{4^n+4^{-n}-2}{3}J + \frac{2-4^n-4^{-n}}{9}J^2$ et que $J^2 = 3J$, le produit précédent se simplifie en $I + 0 \times J = I$, ce qui prouve que $A^{-n} = I + \frac{4^{-n}-1}{3}J$ et que la formule est donc aussi valable pour $n \in \mathbb{Z}$.

**Exercice 1.**

On écrit $P = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour trouver $P^{-1}$, on effectue simultanément sur P et sur $I_n$ les operations suivantes sur les colonnes, en commençant par la fin : $\forall 2 \leqslant k \leqslant n,\ C_k \leftarrow C_k - aC_{k-1}$. Ainsi, P devient $I_n$ et $I_n$ devient la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -a \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}$$

D'après le cours (exemple 10 du cours de F. Gaunard), toute matrice inversible est une matrice de passage : cela signifie que la famille des $u_k$ forme une base de E.

**Exercice 2.** Un vecteur directeur de $\mathcal{D}_t$ est $\overrightarrow{u_t}\binom{\sin t}{1}$ et la droite passe par $A_t(\cos t; 0)$ : alors $\mathcal{D}_t$ admet une représentation paramétrique de la forme $A_t + \lambda\overrightarrow{u_t}$ (ici, $\lambda = y$).

On cherche une courbe $\Gamma$ ayant une représentation de la forme $M_t : A_t + \lambda(t)\overrightarrow{u_t}$, dont un vecteur tangent $\vec{v}_t = \frac{dM}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin t + \lambda'(t)\sin t + \lambda(t)\cos t \\ \lambda'(t) \end{pmatrix}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{u_t}$. Cette condition (determinant nul) conduit à $\lambda(t)\cos t = \sin t$, d'où la paramétrisation $\Gamma$ : $\begin{pmatrix} \cos t + \frac{\sin^2 t}{\cos t} \\ \tan t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos t} \\ \tan t \end{pmatrix}$.

Cela ressemble à une hyperbole, mais ce n'en est pas une.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2026/2027

Semaine 7

Courbes paramétrées – Matrices

**Question de cours.** Écrire une fonction `nb_lettres(texte)` qui prend en argument une chaîne de caractères `texte` et renvoie un dictionnaire associant à chaque lettre le nombre d'occurrences de celle-ci dans le texte.

**Exercice 1.** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ ayant pour matrice, dans la base canonique, la matrice A définie par $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le noyau, le rang et l'image de $f$.
2. Construire $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ telle que $\varepsilon_1 \in \operatorname{Ker} f$ et $\varepsilon_2 \in \operatorname{Im} f$.
   Donner alors la matrice de $f$ dans cette base $\mathcal{B}'$ ainsi que la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$.

**Exercice 2.** Étudier et tracer la courbe $\mathcal{C}$ paramétrée par $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^3}{t^2-1} \\ y(t) = \dfrac{1}{t^3-t} \end{cases}$.

# Élements de correction

**Exercice 1.**

- Notons $v = (1;-2;0)$ : alors $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect} v$, et $\operatorname{rg}(f) = 2$ par le théorème du rang. On voit d'une part que $f(e_2) = v$ donc $v \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$. On voit d'autre part que $f(e_3) = e_3$ : puisque $v$ et $e_3$ ne sont pas colinéaires, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(v, e_3)$.
- On prend $\varepsilon_1 = v \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$, $\varepsilon_2 = e_3$, que l'on complète par un troisième vecteur linéairement indépendant des deux premiers : $\varepsilon_3 = e_2$ par exemple (par mesure de simplicité, car $f(e_2) = v = \varepsilon_1$). Alors $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**Exercice 2.**

• Valeurs interdites pour $t \in \{-1, 0, 1\}$. Symétries : $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'origine ; et $(x(1/t), y(1/t)) = (y(t), x(t))$ donc symétrie d'axe $\Delta$ : $y = x$. On se limite donc à l'étude à $t \in ]0,1[$.

• $x'(t) = \frac{t^2(t^2-3)}{(t^2-1)^2} < 0$ pour $t \in ]0,1[$. Et $y'(t) = \frac{1-3t^2}{(t^3-t)^2} \geqslant 0 \iff t \in ]0, 1/\sqrt{3}]$. D'où le tableau (avec $\alpha = 1/(2\sqrt{3})$) :

| $t$ | $0$ | | $1/\sqrt{3}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x'(t)$ | ‖ | $-$ | | $-$ | ‖ |
| $x(t)$ | $0$ | ↘ | $\alpha/3$ | ↘ | $-\infty$ |
| $y(t)$ | $-\infty$ | ↗ | $\alpha$ | ↘ | $-\infty$ |
| $y'(t)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ |

• Branches infinies : la droite $x = 0$ est une asymptote (quand $t \to 0^+$) .

On peut aussi montrer que $\mathcal{D} : y = x-2$ est une autre asymptote, quand $t \to 1^-$, car $y(t) - x(t) = \frac{1+t^2}{t} \xrightarrow[t \to 1^-]{} 2$.