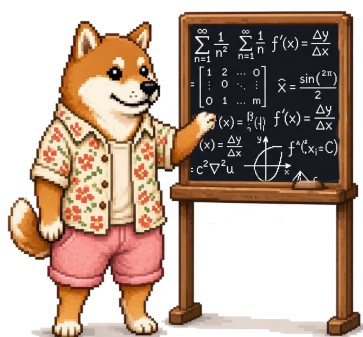




0

Remise en route (Révisions)



Afin de relancer la machine, on propose un premier « chapitre » de rappels de formules qu'il est indispensable de maîtriser. On aura donc lu l'intégralité de ce qui suit **avant** la rentrée.

Il serait naïf de croire qu'il s'agit d'un résumé de ce qu'il faudrait avoir retenu du cours de première année, mais les notions ci-dessous seront utilisées tout au long des autres chapitres.

1 Trigonométrie

Le formulaire qui suit doit être connu sur le bout des doigts, ou sinon on doit être capable d'en retrouver très rapidement tous les éléments sur un coin de brouillon.

La plupart des formules qui suivent sont valables pour tous réels x et y , exceptées celles mettant en jeu des tangentes, où il faudra veiller à ce que tous les termes soient définis. Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

$$x^2 + y^2 = 1 \iff \exists \theta \in \mathbb{R} \begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \end{cases}$$

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1,$$

ce qui donne aussi immédiatement, pour tout $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $1 + \tan^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)}$ et

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad |\cos(\theta)| \leq 1 \quad \text{et} \quad |\sin(\theta)| \leq 1.$$

Proposition 1.

Valeurs particulières

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(\theta)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Proposition 2.**Propriétés de symétrie du cercle trigonométrique**

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta) \quad \sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$$

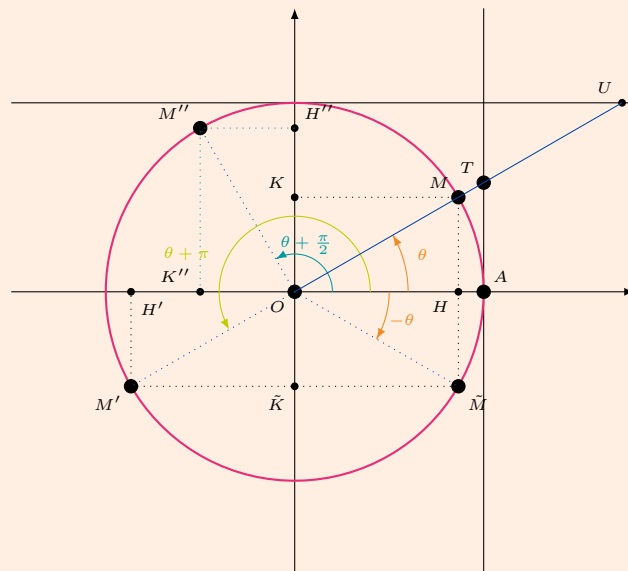
$$\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta) \quad \sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin(\theta) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos(\theta)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta)$$

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta) \quad \sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

$$\tan(-\theta) = -\tan(\theta) \quad \tan(\theta + \pi) = \tan(\theta)$$



☞ Sur la figure,

$$\cos(\theta) = \overline{OH}, \quad \sin(\theta) = \overline{OK}, \quad \tan(\theta) = \overline{AT}$$

$$\tilde{M} = \mathcal{S}_{(OA)}(M), \quad M' = \rho_{0,\pi}(M), \quad M'' = \rho_{0,\frac{\pi}{2}}(M),$$

$$\tilde{K} = \mathcal{S}_{(OA)}(K), \quad H' = \rho_{0,\pi}(H) = \mathcal{S}_{(OK)}(H), \quad H'' = \rho_{0,\frac{\pi}{2}}(H), \quad K'' = \rho_{0,\frac{\pi}{2}}(K).$$

Proposition 3.**Formules d'addition**

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout couple (x, y) tel que les quantités qui suivent sont bien définies (celles faisant intervenir une tangente), on a :

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\sin(x - y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

$$\tan(x - y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x)\tan(y)}$$

☞ Ces formules se retrouvent facilement en identifiant parties réelles et parties imaginaires dans la relation $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$.

Corollaire 1.

Soient α et β deux réels non nuls. Si l'on pose $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, alors il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \alpha \cos(\theta) + \beta \sin(\theta) = r \cos(\theta - \varphi).$$

Exercice 1.**Extrait du cahier de vacances**

Résoudre l'équation $1 + \sin(x) - \cos(x) = 0$.

Proposition 4.**Formules de duplication**

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$$

$$\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

$$\cos(2\theta) = 2 \cos^2(\theta) - 1$$

$$\cos(2\theta) = 1 - 2 \sin^2(\theta)$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2 \tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)} \quad \left(\theta \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \text{ et } \theta \not\equiv \frac{\pi}{4} \left[\frac{\pi}{2} \right] \right)$$

Proposition 5.**Formules de linéarisation**

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\tan^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{1 + \cos(2x)}$$

$$\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2} (\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

$$\sin(x) \sin(y) = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x) \cos(y) = \frac{1}{2} (\sin(x+y) + \sin(x-y))$$

Proposition 6.**Formules de factorisation**

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin(a) + \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\tan(a) + \tan(b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a) \cos(b)}$$

$$\cos(a) - \cos(b) = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin(a) - \sin(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\tan(a) - \tan(b) = \frac{\sin(a-b)}{\cos(a) \cos(b)}$$

Exercice 2.**Extrait du cahier de vacances**

Résoudre sur $\mathbb{R}$, puis sur l'intervalle $[0; 2\pi]$, l'équation $\cos(x) + \cos(3x) = 0$.

Proposition 7.**Dérivées des fonctions trigonométriques**

Les fonctions cosinus, sinus et tangentes sont continues et dérivables sur leur ensemble de définition. Pour tout réel x , on a :

$$\cos'(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$$

$$\sin'(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$$

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) \quad \left(x \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi]\right)$$

☞ On parlera à nouveau des fonctions trigonométriques (et des fonctions trigo inverses) dans le **Chapitre 2**.

2 Sommes, Produits**Définitions****Définition 1.****Symboles Σ et Π**

Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la quantité $\sum_{k=0}^n a_k$ est définie récursivement par:

$$\sum_{k=0}^0 a_k = a_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) + a_{n+1}.$$

De manière analogue, la quantité $\prod_{k=0}^n a_k$ est définie récursivement par:

$$\prod_{k=0}^0 a_k = a_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \prod_{k=0}^{n+1} a_k = \left(\prod_{k=0}^n a_k \right) \times a_{n+1}.$$

Remarque 1.

Soit $p \in \mathbb{N}$, $I = \{i_0, \dots, i_p\}$ un ensemble fini d'entiers, et $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On définit alors la quantité $\sum_{i \in I} a_i$ comme étant la somme $\sum_{k=0}^p a_{i_k} = a_{i_0} + \dots + a_{i_p}$.

Cela permet par exemple de définir $\sum_{k \in \{2p; p \in \llbracket 0, m \rrbracket\}} a_k$, qui est la somme des $m+1$ premiers termes d'indice pair de la

suite (a_n) , c'est-à-dire $a_0 + a_2 + \dots + a_{2m}$. En pratique, on préférera la notation $\sum_{k=0}^m a_{2k}$.

On a la même chose pour les produits.

☞ Par convention, on pose pour toute suite (a_k) :

$$\star \text{ Si } n < 0, \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{i \in \emptyset} a_i = 0.$$

$$\star \text{ Si } n < 0, \prod_{k=0}^n a_k = \prod_{i \in \emptyset} a_i = 1.$$

Définition 2.**Factorielle d'un entier**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle **factorielle** de n , et on note $n!$ la quantité

$$n! = \prod_{k=1}^n k.$$

En particulier, $0! = 1$.

2.1 Quelques formules**Proposition 8.****Somme des (puissances des) premiers entiers**

Pour tout entier n , on a

$$(i) \sum_{k=1}^n k = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad (ii) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad (iii) \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Exercice 3.**Extrait du cahier de vacances**

Calculer $\sum_{k=1}^n k(2k^2 - 1)$. On vérifiera le résultat obtenu par récurrence

Proposition 9.**Sommes télescopiques**

Soient n un entier et (a_k) une suite de complexes. On a $\sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0$.

Exercice 4.

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

Proposition 10.**Somme des premiers termes d'une suite géométrique**

Soit x un nombre complexe. Pour tout entier n , on a $\sum_{k=0}^n x^k = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n+1 & \text{sinon} \end{cases}$.

Proposition 11.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z, a, b \in \mathbb{C}$. On a alors les résultats suivants.

$$(i) \ z^n - 1 = (z - 1) \sum_{k=0}^{n-1} z^k, \quad (ii) \ a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

Exercice 5.

Démontrer les deux formules de la Proposition précédente.

2.2 Coefficients binomiaux**Définition 3.****Coefficient binomial**

Soient $p \leq n$ des entiers. On appelle **coefficient binomial** p parmi n , et on note $\binom{n}{p}$ la quantité définie par

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Proposition 12.**Propriétés algébriques des coefficients binomiaux**

Soient $p \leq n$ des entiers.

- i. Les coefficients binomiaux vérifient une propriété de **symétrie** : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
- ii. Ils vérifient la **formule du triangle de Pascal** : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

Exercice 6.**Extrait du cahier de vacances**

Montrer, par la méthode de votre choix, que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \geq p + 1$, $\sum_{k=p}^{n-1} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n-1}{p}$.

Proposition 13.**Formule du binôme de Newton**

Soient $a, b \in \mathbb{C}$, et $n \in \mathbb{N}$. On a alors:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

☞ Comme on le rappellera au cours du **Chapitre 4**, on peut appliquer cette formule à deux matrices (resp. applications linéaires) **qui commutent**.

Exercice 7.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta)$, puis $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ dans le cas où $\theta \not\equiv 0 [2\pi]$.

2.3 Sommation par paquets**Proposition 14.****Extrait du cahier de vacances**

Soit $E \subset \mathbb{C}$ et I des ensembles finis, ainsi qu'une partition $(E_i)_{i \in I}$ de E .

$$\text{Alors, } \sum_{x \in E} x = \sum_{i \in I} \left(\sum_{x \in E_i} x \right).$$

Par exemple, si $I = \llbracket 1, n \rrbracket$, on peut écrire $\sum_{x \in E} x = \sum_{x \in E_1} x + \cdots + \sum_{x \in E_n} x$.

Exercice 8.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $(1+i)^{4n}$, puis en déduire les valeurs de

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{4n}{2k} \quad \text{et de} \quad \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \binom{4n}{2k+1}.$$

2.4 Sommes doubles

On considère maintenant une suite de complexes $(a_{i,j})$ indexée par **deux indices** i et j . On cherche donc à écrire la somme de ses termes lorsque les deux indices parcourent un certain ensemble.

Ainsi, la *somme double*

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{i,j}$$

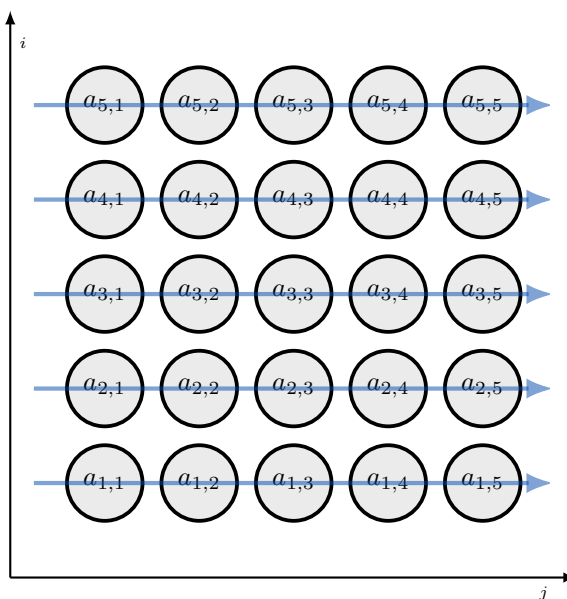
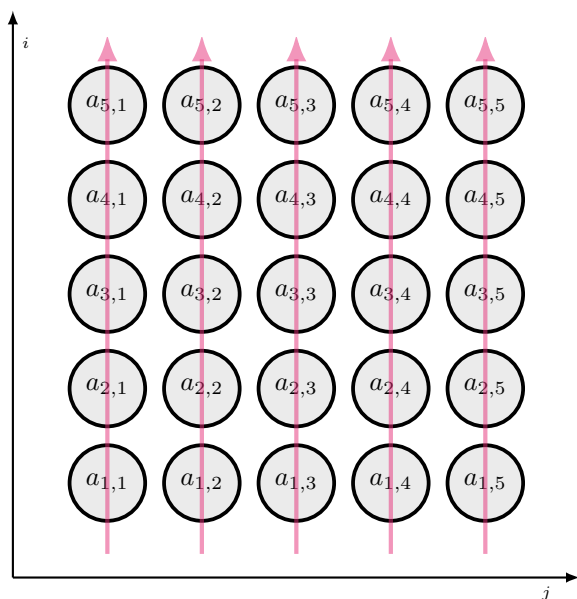
représente la somme de tous les termes $a_{i,j}$ dont le premier indice est compris entre 1 et n et dont le deuxième indice est compris entre 1 et m . Lorsque i et j parcourent le même ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$, la somme précédente s'écrira $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}$.

Méthode 1.**Permutation des indices de sommation**

Lorsque les indices ne dépendent pas l'un de l'autre, on peut permuter l'ordre de sommation, ce qui revient à lister les termes sommés dans un autre ordre.

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} \right).$$

Par exemple, pour $1 \leq i, j \leq 5$, on peut illustrer cette propriété avec le schéma suivant : $\sum_{j=1}^5 \sum_{i=1}^5 a_{i,j} = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 a_{i,j}$.

**Exercice 9.**

Soient $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On cherche à calculer de deux manières différentes la somme $\sum_{k=1}^n kx^k$.

1. En écrivant $\sum_{k=1}^n kx^k$ comme une somme double, répondre à la question posée.
2. Retrouver le résultat à partir de la formule de la **Proposition 10**.

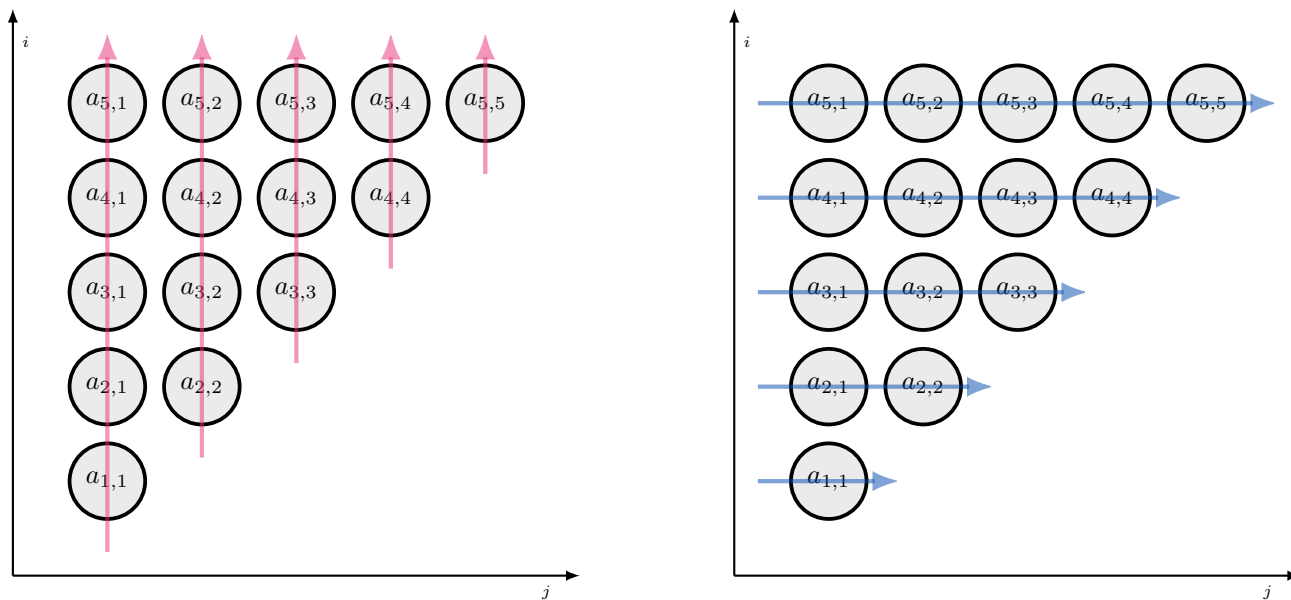
Exercice 10.

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$.

Méthode 2.**Permutation des indices de sommation, dépendance du deuxième indice**

Parfois, le deuxième indice varie en fonction du premier et l'ordre de sommation peut avoir une incidence sur la simplification des calculs. On fait donc attention à cette dépendance d'indices lors de la permutation de ceux-ci

$$1 \leq j \leq i \leq n \iff \begin{cases} 1 \leq j \leq n \\ j \leq i \leq n \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq i \end{cases}$$



$$\sum_{j=1}^5 \sum_{i=j}^5 a_{i,j} = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^i a_{i,j}.$$

Exemple 1.

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j+1} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i}{j+1} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \frac{i}{j+1} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j+1} \sum_{i=1}^j i \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j+1} \times \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 11.

Calculer $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$.

3 Nombres complexes, Racines de l'unité**Exercice 12.**

Extrait du cahier de vacances

On pose $z = \frac{1 + \sqrt{2} + i}{1 + \sqrt{2} - i}$. Calculer $|z|$. Mettre z sous forme algébrique. Calculer z^{2026} .

Exercice 13.**Extrait du cahier de vacances**

Pour chacune des deux questions (indépendantes) suivantes, proposer une résolution par le calcul puis une autre résolution géométrique.

1. Déterminer les valeurs de z pour lesquelles $z, \frac{1}{z}$ et $1 - z$ ont même module.
2. Trouver tous les nombres complexes z vérifiant $|z| = |z - 4|$ et $\arg(z) = \arg(z + 1 + i)$.

Proposition 15.**Formules d'Euler**

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Méthode 3.**Linéarisation d'une expression trigonométrique**

Soient $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ et $x \in \mathbb{R}$. Pour linéariser l'expression $\cos^p(x) \sin^q(x)$, on peut procéder comme suit.

1. On commence par utiliser les formules d'Euler :

$$\cos^p(x) \sin^q(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^p \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^q.$$

2. On développe ensuite les expressions $\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^p$ et $\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^q$ à l'aide de la formule du binôme de Newton, puis on développe le produit de deux facteurs ainsi obtenu.
3. Enfin, il suffit de remarquer que la somme obtenue fait apparaître des couples de termes conjugués : grâce encore une fois à la formule d'Euler on peut ne faire apparaître que des cosinus et des sinus.

Exercice 14.**Extrait cahier de vacances**

Linéariser $\cos^4(x)$.

Proposition 16.**Formule de Moivre**

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n$.

Méthode 4.

La formule de Moivre ci-dessus, combinée la formule du binôme et une identification des parties réelles et imaginaires permet d'exprimer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction des puissances de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$

$$\cos(n\theta) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} \cos^{n-k}(\theta) (i \sin(\theta))^k, \quad \sin(n\theta) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} \cos^{n-k}(\theta) (i \sin(\theta))^k.$$

Exercice 15.

Exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.

3.1 Racines de l'unité

Dans cette section, on considère un entier naturel non nul n .

Définition 4.**Racines de l'unité**

On appelle **racine n -ième de l'unité** toute solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$. On note alors $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité :

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}.$$

Proposition 17.

On a les résultats suivants :

- i. $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} : k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$.
- ii. $\mathbb{U}_n$ contient exactement n éléments.
- iii. Posons $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. On peut alors écrire $\mathbb{U}_n = \{\omega^k : k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$.

Proposition 18.**Somme des racines n -ièmes de l'unité**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. On a

$$\sum_{z \in \mathbb{U}_n} z = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 1 \\ 1 & \text{si } n = 1 \end{cases}.$$

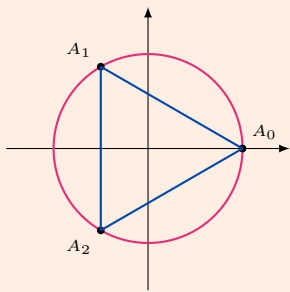
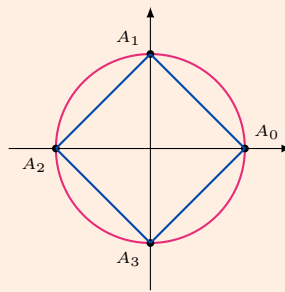
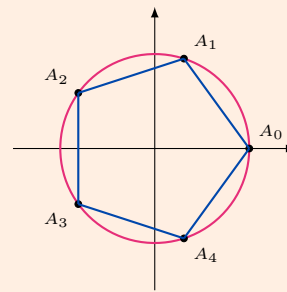
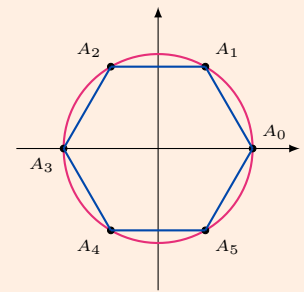
Exemple 2.

On a $\mathbb{U}_1 = \{1\}$, $\mathbb{U}_2 = \{1, -1\}$, $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

De plus, on a $j^2 = j^{-1} = \bar{j}$ et $1 + j + j^2 = 0$.

Proposition 19.**Polygones réguliers associés aux racines n -ièmes de l'unité**

Pour $n \geq 3$, les points dont l'affixe est dans $\mathbb{U}_n$ sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.

 $\mathbb{U}_3$  $\mathbb{U}_4$  $\mathbb{U}_5$  $\mathbb{U}_6$ **Définition 5.**

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que z est une racine n -ième de a si $z^n = a$.

Proposition 20.**Racines d'un complexe non nul**

Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Alors :

- i. a admet exactement n racines n -ièmes.
- ii. Si b est une racine n -ième quelconque de a , alors l'ensemble des racines n -ièmes de a est :

$$\{z \in \mathbb{C}^* : z^n = a\} = \{bz : z \in \mathbb{U}_n\} = \left\{ be^{\frac{2ik\pi}{n}} : k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}.$$

☞ Pour obtenir toutes les racines n -ièmes d'un complexe $a \in \mathbb{C}^*$, il suffit donc d'en déterminer une, puis de multiplier celle-ci par toutes les racines n -ième de l'unité.

Exercice 16.**Extrait du cahier de vacances**

Déterminer les racines cubiques de $-8i$.

4 Polynômes**4.1 Généralités**

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On note $\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur (ou égal) à n .

Remarque 2.

Dans la suite la lettre X ne désigne pas une variable, mais une *indéterminée*. Il n'aurait ainsi aucun sens d'écrire par exemple une formule commençant par $\forall X \in \mathbb{K}$, ou d'écrire "prenons $X = 1$ ".

Proposition 21.**Théorème d'identification des coefficients**

Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients.

☞ En particulier, un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

Exercice 17.**Formule de Vandermonde**

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $P(X) = (X + 1)^n$.

1. En calculant de deux manières différentes le polynôme P^2 , montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, \quad \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{2n}{k}.$$

2. En déduire la *formule de Vandermonde*: $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

Théorème 1.**Division euclidienne sur les polynômes**

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $B \neq 0$. Alors, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que :

$$(i) \ A = BQ + R, \quad (ii) \ \deg(R) < \deg(B).$$

On dit alors que Q est le **quotient** et R le **reste** de la division euclidienne de A par B .

Exercice 18.

Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de $X^4 - 1$ par $X - 1$.

Exercice 19.

Calculer $\int_0^1 \frac{x^4 + x - 1}{x^2 + 1} dx$.

☞ Des rappels d'intégration apparaîtront au **Chapitre 5**.

Définition 6.

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que B **divise** A s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$.

☞ Il est clair que B divise A si et seulement si le reste dans la division euclidienne de A par B est nul.

4.2 Racines d'un polynôme**Définition 7.****Racine d'un polynôme**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une **racine** (ou est **un zéro**) de P si $P(\alpha) = 0$.

Théorème 2.**Caractérisation des racines d'un polynôme**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- i. α est une racine de P .
- ii. $(X - \alpha)$ divise P .
- iii. $\exists Q \in \mathbb{K}[X], P(X) = (X - \alpha)Q(X)$.

Définition 8.**Ordre d'une racine**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}$. On dit que α est une **racine d'ordre k** de P si $(X - \alpha)^k$ divise P et $(X - \alpha)^{k+1}$ ne divise pas P . L'entier k est alors appelé **l'ordre de multiplicité** de α .

Théorème 3.**Caractérisation des racines de multiplicité k d'un polynôme**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- i. α est une racine de multiplicité k de P .
- ii. $\exists Q \in \mathbb{K}[X], P(X) = (X - \alpha)^k Q(X)$ et $Q(\alpha) \neq 0$.
- iii. $\forall i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket, P^{(i)}(\alpha) = 0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

4.3 Nombre de racines d'un polynôme

Théorème 4.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$. Alors P admet au plus n racines distinctes.

Corollaire 2.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$. Alors le nombre de racines de P , comptées avec multiplicité, est inférieur ou égal à n .

C'est-à-dire que si $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont des racines de P de multiplicité respective $m_1, \dots, m_r$, on a $\sum_{k=1}^r m_k \leq n$.

Corollaire 3.

Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Si P admet au moins $n + 1$ racines distinctes, alors $P = 0$.

☞ On en déduit que *tout polynôme admettant une infinité de racines distinctes est nul*.

Corollaire 4.

Soit $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ des scalaires deux à deux distincts. Si, pour tout $i \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$, $P(\alpha_i) = Q(\alpha_i)$, alors $P = Q$.

☞ Deux polynômes qui coïncident en un nombre de points strictement supérieur à leur degré coïncident partout.

4.4 Polynômes scindés

Définition 9.

Polynôme scindé

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est **scindé sur** $\mathbb{K}$ lorsque P est constant ou lorsque il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ (pas nécessairement distinctes) tels que :

$$P(X) = \lambda \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i).$$

En d'autres termes, un polynôme est scindé s'il peut se décomposer comme produit de polynômes de degré 1.

Exemple 3.

$X^2 + 1$ est scindé sur $\mathbb{C}$, mais pas sur $\mathbb{R}$.

Théorème 5.

Théorème de d'Alembert-Gauss

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 admet au moins une racine complexe.

Preuve. Résultat admis. □

Théorème 6.

Tout polynôme à coefficients complexes est scindé sur $\mathbb{C}$.

Remarque 3.

Tout polynôme à coefficients complexes peut alors se mettre sous la forme $P(X) = \lambda \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i}$, où $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ est l'ensemble des racines de P , λ est son coefficient dominant, et m_i est la multiplicité de α_i en tant que racine de P . Cette écriture est alors unique à l'ordre des facteurs près.

Exercice 20.

Extrait du cahier de vacances

Factoriser $X^5 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Remarque 4.

On voit sur cet exemple que tout polynôme à coefficients réels, à défaut d'être scindé, se décompose comme un produit de polynômes de degré 1 et de polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.

4.5 Relations coefficients racines

Proposition 22.

Soit $P(X) = aX^2 + bX + c \in \mathbb{K}[X]$, avec $a \neq 0$, et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- i. α et β sont les racines de P .
- ii. $P(X) = a(X - \alpha)(X - \beta)$.
- iii. $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ et $\alpha\beta = \frac{c}{a}$.

☞ On retrouve le résultat suivant: a et b sont racines de $X^2 - SX + P$, où $S = a + b$ et $P = ab$.

On a enfin le résultat suivant, pour les polynômes de degré supérieur.

Proposition 23.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, avec $a_n \neq 0$ un polynôme scindé et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les racines de P . Alors :

$$(i) \sum_{k=1}^n \alpha_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad (ii) \prod_{k=1}^n \alpha_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

5 Suites numériques

5.1 Convergence des suites

Définition 10.

Limite d'une suite

✗ On dit qu'une suite (u_n) **diverge vers l'infini**, ce que l'on notera $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, si elle vérifie :

$$\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n > A.$$

✗ On dit qu'une suite (u_n) **diverge vers moins l'infini**, ce que l'on notera $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$, si elle vérifie :

$$\forall A < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n < A$$

✗ Soit (u_n) une suite et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que (u_n) **converge vers** ℓ , ce que l'on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, si elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Proposition 24.

Prolongement des inégalités

Soient a, b des réels, et (u_n) une suite convergente telle qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant: $\forall n \geq n_0, a < u_n < b$. Alors,

$$a \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq b.$$

Théorème 7.

Théorème de la limite monotone

Soit (u_n) une suite réelle monotone.

- ✗ Si (u_n) est croissante, alors:
 - i. si la suite est majorée, elle possède une limite finie ℓ ;
 - ii. sinon, elle tend vers $+\infty$.

Et dans le cas où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell$.

- ✗ Si (u_n) est décroissante, alors:
 - i. si la suite est minorée elle possède une limite finie ℓ ;
 - ii. sinon, elle tend vers $-\infty$.

Et dans le cas où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \ell$.

☞ Toute suite monotone possède donc une limite, finie ou infinie.

Définition 11.

On dit que deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, si

- ✕ l'une de ces deux suites est croissante et l'autre est décroissante;
- ✕ la différence des deux termes généraux tend vers 0 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$.

Théorème 8.

Suites adjacentes

Soient (a_n) et (b_n) deux suites adjacentes. Alors elles convergent toutes les deux et ont même limite.

Exercice 21.

Irrationalité de e et suites adjacentes

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \cdot n!}$$

sont adjacentes.

2. En déduire que e est irrationnel.

Définition 12.

Suite extraite

Étant donnée une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on appelle **suite extraite** de (u_n) ou **sous-suite** de (u_n) toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante.

☞ Une sous-suite d'une suite (u_n) est donc une suite obtenue en ne conservant que certains des termes de (u_n) , extraits dans l'ordre.

Proposition 25.

Si une suite (u_n) possède une limite, alors toute suite extraite de (u_n) possède la même limite.

Théorème 9.

Soit (u_n) une suite, et ℓ qui est soit un réel soit égal à $\pm\infty$. On a alors : $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \iff \begin{cases} u_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \\ u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \end{cases}$.

Théorème 10.

Encadrement et comparaison

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites. Alors

- i. Si, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$ et que (u_n) diverge vers $+\infty$, alors (v_n) diverge aussi vers $+\infty$.
- ii. Si, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$ et que (v_n) diverge vers $-\infty$, alors (u_n) diverge aussi vers $-\infty$.
- iii. Si, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $w_n \leq u_n \leq v_n$ et que (w_n) et (v_n) convergent vers une même limite finie ℓ , alors (u_n) converge également vers ℓ .

Exercice 22.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.

5.2 Suites usuelles

Exercice 23.

Dans chacun des cas suivants, déterminer u_n en fonction de n . On en profitera pour rappeler la méthode.

1. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 2$
2. $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0$.
3. $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 0$.

5.3 Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Méthode 5.

Étude suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ - avec f croissante

Pour étudier une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par son premier terme u_0 et une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$, on suit les étapes ci-contre :

- ✗ On étudie brièvement les variations de f sur son ensemble de définition ;
- ✗ On vérifie que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est bien définie (il n'y a pas de terme u_n qui tombe en dehors du domaine de définition de f pour un certain n , rendant impossible le calcul des termes suivants).
Pour ce faire, en général on montre une condition plus restrictive, souvent que la suite est bornée (tous les termes sont dans un certain intervalle, stable par f) par récurrence.
- ✗ On étudie les variations de la suite.
Pour ce faire, si f est croissante, on peut utiliser une récurrence, si l'on connaît les deux premiers termes de la suite (pour initialiser la récurrence) - les autres termes seront rangés dans le même ordre.
Sinon, on étudie le signe de $f(x) - x$.

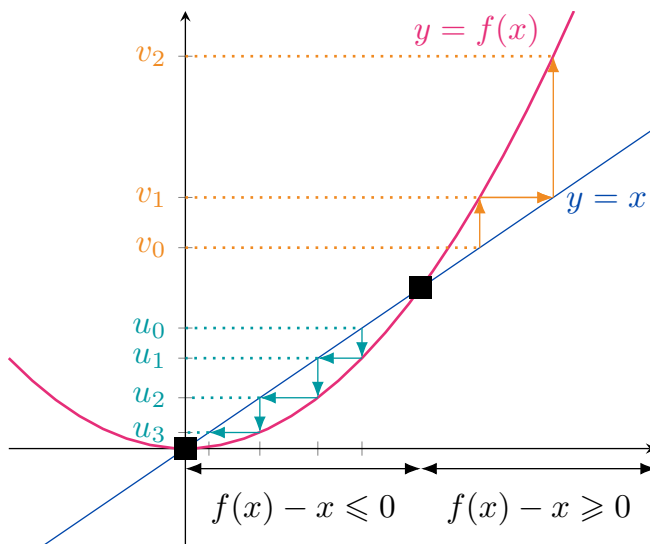
Attention, écrire que la suite est croissante car la fonction est croissante est une hérésie. Une fonction croissante peut générer une suite croissante ainsi qu'une suite décroissante (selon la localisation du premier terme).

Par contre, une fonction croissante génère toujours une suite **monotone**.

- ✗ On utilise le **théorème de convergence monotone** pour justifier de la convergence de la suite vers une certaine limite ℓ (qu'on ne connaît pas à ce stade) qui se trouve dans le même intervalle (**fermé**) que les termes de la suite.
- ✗ On utilise la continuité de f au voisinage de ℓ pour obtenir l'équation de point fixe vérifié par ℓ (à savoir $f(\ell) = \ell$) et déterminer la valeur de ℓ .
Les points fixes de f sont les seules valeurs possibles pour une limite finie (lorsque f est continue).

Exemple 4.

Suite récurrente et schéma en escalier



Sur l'exemple ci-contre,

- ✗ f est (continue et) croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- ✗ Les points fixes, donc limites finies éventuelles pour une suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ sont $\ell = 0$ ou $\ell = 1$.
- ✗ $f(x) - x \leq 0$ sur $[0, 4]$. Si on prend un premier terme $u_0 \in [0, 4]$, tous les termes de la suite sont dans le même intervalle (stable par f) et la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ générée est **décroissante**. On voit qu'elle converge vers $\ell = 0$.
- ✗ $f(x) - x \geq 0$ sur $[4, +\infty[$. Si on prend un premier terme $v_0 > 4$, alors tous les termes de la suite sont donc dans ce même intervalle (stable par f) et la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ générée est **croissante**. On montre par l'absurde qu'elle ne peut pas converger (car $v_n \geq v_0 > 4$) donc elle diverge vers $+\infty$.

☞ Lorsque f est décroissante, on peut étudier les suites extraites de rangs pairs et impairs qui seront elles monotones. Si elles convergent vers une même limite, (u_n) est convergence vers cette limite.

Exercice 24.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x \ln(1+x)$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0; +\infty[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. a. Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur $[0; +\infty[$ et calculer, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
b. En déduire les variations de f .
2. a. Étudier le signe de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$.
b. Quelles sont les limites possibles de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
3. On suppose dans cette question : $u_0 \in]e-1; +\infty[$.
a. Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e-1 < u_n \leq u_{n+1}$.
b. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
4. On suppose, dans cette question : $u_0 \in]0; e-1[$.
Étudier la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 25.

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et que $u_n \in [1; 3]$.
2. Calculer u_1, u_2, u_3 . La suite (u_n) est-elle monotone ?
3. Montrer que (u_{2n}) est croissante et que (u_{2n+1}) est décroissante.
4. Conclure quant à la nature de la suite (u_n) .

☞ Dans le cas où la fonction f serait contractante (qu'elle soit croissante ou non), on peut utiliser le résultat suivant. Il donne une information sur la vitesse de convergence (qui est sous-géométrique) et permet notamment l'écriture de script en Python pour obtenir une valeur approchée de la limite.

Théorème 11.**Suites récurrentes et fonction contractante**

Soient $q \in [0, 1[$ et $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ dérivable telle que $\forall x \in [a, b]$, $|f'(x)| \leq q$.

On définit une suite (u_n) en posant $u_0 \in [a, b]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. On a alors les résultats suivants.

- i. f possède un unique point fixe ℓ ;
- ii. $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leq q|u_n - \ell|$;
- iii. $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq q^n|u_0 - \ell|$;
- iv. (u_n) converge vers ℓ .

Exercice 26.

On considère l'équation (E) $2x + \sin(x) = 4$.

1. Montrer que (E) possède une unique solution que l'on notera α .
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(4 - \sin(u_n))$ converge vers α .
3. Déterminer un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à ε près.
4. Écrire une fonction Python prenant en argument un réel $\varepsilon > 0$ qui renvoie une valeur approchée de α à ε près.

5.4 Comparaison de suites au voisinage de l'infini

Ces notions seront rappelées dans le cadre des fonctions et détaillées dans le **Chapitre 1**.

Définition 13.**Quantités équivalentes, négligeables et dominées**

✗ Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que la suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On dit que (u_n) est **négligeable** devant (v_n) (en $+\infty$), et on note $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

✗ Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que la suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On dit que les quantités u_n et v_n sont **équivalentes** (en $+\infty$), et on note $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

✗ Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que la suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On dit que (u_n) est **dominée** par (v_n) , et on note $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$ si et seulement si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée.

Exercice 27.

Montrer que, si (u_n) est négligeable devant (v_n) , alors (u_n) est dominée par (v_n) .
Que dire de la réciproque ?

Proposition 26.

Si (u_n) est une suite convergente de limite ℓ **non nulle**, alors on a $u_n \sim \ell$.

On prendra bien garde à ne **jamais** écrire qu'une quantité est équivalente à 0, ce qui n'a aucun sens.

Proposition 27.**Caractérisation de l'équivalence par les petits- o**

On a l'équivalence :

$$u_n \sim v_n \iff u_n = v_n + o(v_n) \quad (n \rightarrow +\infty)$$

☞ La réciproque indique qu'on peut négliger les termes négligeables dans une somme. Ainsi

$$u_n + o(u_n) \sim u_n.$$

Proposition 28.**Équivalents et limites**

Si les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes, alors elles sont de même nature, c'est-à-dire

- i. Si $u_n \sim v_n$ et si (v_n) converge vers ℓ , alors (u_n) converge également vers ℓ .
- ii. Si $u_n \sim v_n$ et si (v_n) diverge vers $\pm\infty$, alors (u_n) diverge également vers $\pm\infty$.

6 Autres exercices

6.1 Manipulation de sommes, de produits

Exercice 28.

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$i. \prod_{i=0}^n 2^i, \quad ii. \prod_{i=1}^n \frac{i+1}{2}, \quad iii. \prod_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right).$$

Exercice 29.

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$i. \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j), \quad ii. \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j}, \quad iii. \sum_{1 \leq i, j \leq n} \ln(i^j).$$

6.2 Équations trigonométriques

On retrouvera par exemple ce type d'équation lors de la recherche de points singuliers ou de points multiples dans le cadre de l'étude des courbes paramétrées du **Chapitre 3**.

Exercice 30.

Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $[-\pi, \pi]$ les équations et inéquations suivantes :

$$\begin{array}{ll} i. \cos(5x) - \sin(5x) = 0 & ii. \cos(2x) + (\sqrt{3} + 2) \cos(x) + 1 + \sqrt{3} = 0 \\ iii. \tan(x) \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 & iv. \cos(3x) - \sin(3x) < \sqrt{2} \\ v. \sqrt{2} (\cos(5x) - \sin(5x)) - (\cos(x) + \sqrt{3} \sin(x)) = 0 & vi. \cos(x) + \cos 7x = \cos(3x) \\ vii. \cos(x) - \cos 2x = \sin(3x) & viii. \cos(2x) - 9 \cos(x) + 5 > 0 \end{array}$$

Exercice 31.

1. Résoudre $(E) : \sin(4x) - \sin(x) = 0$.

2. Déterminer un polynôme P tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(4x) - \sin(x) = \sin(x) P(\cos(x)).$$

3. Calculer les racines de P et en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 32.

Exprimer $\cos(7\theta)$ à l'aide de $\cos(\theta)$, pour $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 33.

Linéariser $\sin^3(x) \cos^4(x)$.

Exercice 34.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} 3^k \sin^3\left(\frac{\pi}{3^{k+1}}\right).$$

1. a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$, puis en déduire une expression de $\sin^3(x)$ en fonction de $\sin(3x)$ et de $\sin(x)$.

b. En utilisant la question précédente, montrer $S_n = \frac{3^n}{4} \sin\left(\frac{\pi}{3^n}\right)$.

2. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

6.3 Polynômes

Exercice 35.

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants.

$$\begin{array}{lll} i. X^3 - 6X^2 + 11X - 6 & ii. X^4 + X^2 + 1 & iii. X^6 + X^3 + 1 \\ iv. (3X - 1)^5 - (X + 2)^5 & v. X^3 + 8i & vi. X^4 - \sqrt{2} + i\sqrt{2} \end{array}$$

Exercice 36.

Montrer que le polynôme P divise Q dans chacun des cas suivants.

1. $Q = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ et $P = (X-1)^3$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
2. $Q = (X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$ et $P = X^2 - X + 1$, avec $n \in \mathbb{N}$.
3. $Q = X^{3n+2} + X^{3p+1} + X^{3q}$ et $P = X^2 + X + 1$, avec $n, p, q \in \mathbb{N}$.

Exercice 37.

Oral Math II

Soit $P = X^2 - 2X \cos(\theta) + 1$ et $Q_n = X^n \sin(\theta) - X \sin(n\theta) + \sin((n-1)\theta)$, pour $n \geq 2$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que P divise Q_n .
2. Déterminer le quotient dans la division euclidienne de Q_n par P .

Exercice 38.

Oral Math II 2024, extrait du cahier de vacances

Soit un entier $q \geq 2$. On pose $Q(X) = qX^q - \sum_{k=0}^{q-1} X^k \in \mathbb{C}[X]$ et $R = (X-1)Q$.

1. Montrer que 1 est racine de Q .
2. Montrer que si z est racine de Q alors $q|z|^q \leq \sum_{k=0}^{q-1} |z|^k$ et $|z| \leq 1$.
3. Montrer que $R(X) = qX^{q+1} - (q+1)X^q + 1$.
4. Montrer que 1 est racine double de R et que les autres racines de R sont simples.
5. En déduire que Q n'admet que des racines simples.

Exercice 39.

Oral Math II 2017

Soit n un entier naturel impair et P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ayant la propriété $(\mathcal{P})$ suivante :

$$(X^n + 1)P(X) = P(X^2).$$

1. Dire si le polynôme $X^n - 1$ vérifie la propriété $(\mathcal{P})$.
2. Déterminer le degré du polynôme P .
3. Soit ω une racine n -ième de -1 . Montrer que $-\omega$ est racine de P .
4. Quels sont les polynômes vérifiant la propriété $(\mathcal{P})$?

Exercice 40.

Oral Math II 2017

1. Prouver que $P = (X+i)^7 + (X-i)^7$ est à coefficients réels.
2. Trouver les racines de P .
3. Montrer qu'elles sont réelles et les exprimer à l'aide de fonctions trigonométriques.

6.4 Nombres complexes, racines de l'unité

Exercice 41.

1. Établir que pour tout entier $n \geq 2$ et tout $z \in \mathbb{C}, z \neq 1$, on a : $\prod_{k=1}^{n-1} \left(z - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) = \sum_{i=0}^{n-1} z^i$. Justifier que l'égalité reste valable pour $z = 1$.
2. En déduire l'égalité $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Exercice 42.

On considère l'équation $(z+1)^5 = (z-1)^5$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. Résoudre cette équation en développant.
2. Résoudre cette même équation en utilisant les racines cinquièmes de l'unité.
3. En comparant les deux résultats obtenus, déterminer une valeur exacte de $\cos \left(\frac{2\pi}{5} \right)$ et $\cos \left(\frac{4\pi}{5} \right)$.

6.5 Utilisation des complexes en géométrie

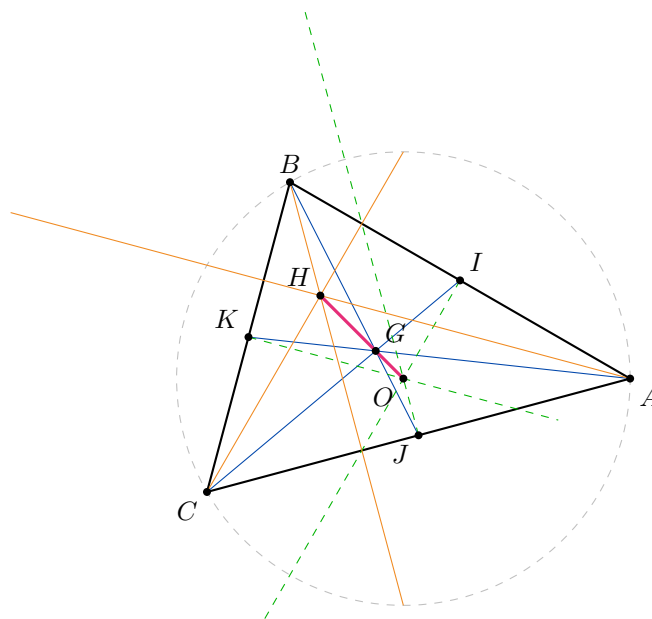
Exercice 43.

Droite d'Euler

ABC est un triangle non aplati, dont le centre de son cercle circonscrit est l'origine O du repère orthonormé direct. On note a, b et c les affixes respectives de A, B et C .

Montrer que les trois médiatrices de ABC sont concourantes en O , que ses médianes sont concourantes en G d'affixe $\frac{1}{3}(a+b+c)$ et que ses hauteurs sont concourantes en H d'affixe $a+b+c$.

Que peut-on dire des points O, G et H ?



Exercice 44.**Question de cours, Banque PT 2021**

Soit M un point de $\mathbb{R}^2$ d'affixe complexe z .

- Donner sans justification :
 - l'affixe complexe de l'image de M par la rotation r_θ de centre O et d'angle θ .
 - l'affixe complexe de l'image de M par l'homothétie h_a de centre O et de rapport a avec $a \neq 0$.
- Vérifier que $r_\theta \circ h_a = h_a \circ r_\theta$.

6.6 Suites**Exercice 45.**

Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n^2}$.

Exercice 46.**Oral Math II 2023**

Pour tout entier $n \geq 2$, on définit $P_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$ et $G_n(x) = -1 - \ln(1-x) - P_n(x)$.

- Montrer qu'il existe une unique solution $c \geq 0$ vérifiant $P_2(c) = 0$.
- Montrer que pour tout $n \geq 2$, P_n admet une unique racine a_n positive et $a_n \in [0, c]$.
- Calculer $\sup_{x \in [0, c]} |G'_n(x)|$ et prouver que $|1 + \ln(1 - a_n)| \leq 2c^{n-1}$.
- Étudier la suite $(a_n)_{n \geq 2}$ (monotonie, convergence et limite).

Exercice 47.**Suite implicite, Oral Math II 2026**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 1[$, on pose

$$f_n(x) = \frac{1}{2x} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - k^2}, \quad g_n(x) = \frac{1}{2x} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{1}{4} - k^2}.$$

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0, 1[$ notée u_n .
- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{1}{4} - k^2} = \frac{-4n}{2n+1}$.
- Soient $x \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ fixés. Comparer $f_n(x)$ et $g_n(x)$.
Montrer que : $u_n \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{8n}$.
Déterminer alors la limite de la suite $(u_n)_n$.