



1

Fonctions d'une variable réelle

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ (c'est à dire non vide et non réduit à un seul point). Si les bornes de I sont deux réels a et b , on appelle *adhérence* de I , et on note $\bar{I}$, l'ensemble $\bar{I} = I \cup \{a, b\}$. Plus généralement, l'adhérence d'une partie A de $\mathbb{R}$ est l'ensemble obtenu en rajoutant à A les points de sa *frontière*. Par extension, on note $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty; +\infty]$.

Le début de ce chapitre propose principalement des rappels sur l'étude locale et globale des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles.

On étend ensuite certains résultats aux fonctions à valeurs vectorielles.

Définition 1.1.

Voisinage d'un point

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors,

- ✗ tout intervalle de la forme $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ avec $\delta > 0$ est appelé "un voisinage de x_0 ";
- ✗ tout intervalle de la forme $]x_0, x_0 + \delta[$ avec $\delta > 0$ est appelé "un voisinage de x_0^+ ";
- ✗ tout intervalle de la forme $]x_0 - \delta, x_0[$ avec $\delta > 0$ est appelé "un voisinage de x_0^- ";
- ✗ tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ avec $A > 0$ est appelé "un voisinage de $+\infty$ ";
- ✗ tout intervalle de la forme $] - \infty, A[$ avec $A < 0$ est appelé "un voisinage de $-\infty$ ".

L'ensemble des voisinages de $\alpha \in \bar{\mathbb{R}}$ est noté $V(\alpha)$.

☞ Tout voisinage de $\alpha \in \bar{\mathbb{R}}$ est un intervalle ouvert et non trivial, car on a pris $\delta > 0$.

Définition 1.2.

Soit $\alpha \in \bar{\mathbb{R}}$ et $P(x)$ une propriété dépendant de x . On dit que " $P(x)$ est vraie au voisinage de α " s'il existe un voisinage V de α tel que $P(x)$ soit vraie pour tout $x \in V$.

Exemple 1.1.

- ✗ Dire que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est positive au voisinage de $+\infty$ c'est dire qu'il existe un voisinage de $+\infty$ dans lequel f est positive, c'est à dire :

$$\exists A > 0, \forall x \in]A, +\infty[, f(x) \geq 0.$$

- ✗ Soit x_0 un réel. Dire que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est définie au voisinage de x_0 c'est dire que :

$$\exists \delta > 0,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I.$$

1 Limites d'une fonction à valeurs réelles

Définition 1.3.

Limite en x_0

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Si x_0 et ℓ sont des réels:

✗ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ équivaut à $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, (|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon)$.

✗ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ équivaut à $\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, (|x - x_0| < \delta \implies f(x) > A)$.

✗ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ équivaut à $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in I, (x > A \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon)$.

Cette définition s'applique également si α, β sont de la forme x_0^+ ou x_0^- avec $x_0 \in \mathbb{R}$, ce qui donne par exemple :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, (0 < x - x_0 < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon).$$

Exercice 1.1.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction impaire. On suppose que f admet ℓ pour limite en $+\infty$. Montrer que f admet $-\ell$ pour limite en $-\infty$.

1.1 Quelques résultats sur les limites

Théorème 1.1.

Caractérisation séquentielle de la limite

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $\alpha \in \bar{I}$ et $\beta \in \bar{\mathbb{R}}$. Alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \beta$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de I tendant vers α , on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \beta$.

Exercice 1.2.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique (de période T) admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Théorème 1.2.

Prolongement des inégalités

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \in \bar{I}$, et a, b des réels. On suppose que f possède une limite finie en α et que

$$\forall x \in I, a < f(x) < b.$$

On a alors

$$a \leq \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) \leq b.$$

Le passage à la limite prolonge donc tout type d'inégalités en **inégalités larges**.

Lemme 1.3.

Théorème des gendarmes

Soient $f, g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \in \bar{I}$, et ℓ un réel. On suppose encore:

✗ $\forall x \in I, g(x) \leq f(x) \leq h(x);$

✗ $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} h(x) = \ell.$

Alors (f possède une limite lorsque x tend vers α et) $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \ell$.

Exercice 1.3.

Montrer, à l'aide de considérations géométriques, que, pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$0 < \sin(x) \leq x \leq \tan(x).$$

En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Les théorèmes suivants sont l'expression fonctionnelle du théorème de la limite monotone vu dans le cadre des suites.

Théorème 1.4.**Théorème de la limite monotone**

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, de sorte que $a < b$, et $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Si la fonction f est croissante sur $]a, b[$, alors elle admet une limite, finie ou infinie, en a et en b . Plus précisément, on a :

- i. $\times$ si f n'est pas majorée sur $]a, b[$, alors $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$.
 $\times$ si f est majorée sur $]a, b[$, alors f possède une limite finie en b^- .
- ii. $\times$ si f n'est pas minorée sur $]a, b[$, alors $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$.
 $\times$ si f est minorée sur $]a, b[$, alors f possède une limite finie en a^+ .

Théorème 1.5.**Théorème de la limite monotone, bis**

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, de sorte que $a < b$, et $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Si la fonction f est décroissante sur $]a, b[$, alors elle admet une limite, finie ou infinie, en a et en b . Plus précisément, on a :

- i. $\times$ si f n'est pas majorée sur $]a, b[$, alors $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$;
 $\times$ si f est majorée sur $]a, b[$, alors f possède une limite finie en a^+ .
- ii. $\times$ si f n'est pas minorée sur $]a, b[$, alors $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$;
 $\times$ si f est minorée sur $]a, b[$, alors f possède une limite finie en b^- .

1.2 Comparaison locale (au voisinage d'un point)**Définition 1.4.****Négligeabilité**

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage V de $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que g ne s'annule pas sur V .

On dit que f est **négligeable devant** g au voisinage de α si et seulement si $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

On note $f(x) \underset{x \rightarrow \alpha}{=} o(g(x))$ ou $f(x) = o(g(x)), x \rightarrow \alpha$.

Exemple 1.2.

$\times$ On peut alors écrire les relations suivantes

$$(i) \ x^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x), \quad (ii) \ e^x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{2x}), \quad (iii) \ \frac{1}{x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$\times$ Dire que $f(x) \underset{x \rightarrow \alpha}{=} o(1)$, c'est dire que f tend vers 0 en α . On a la même conclusion sous l'hypothèse $f(x) \underset{x \rightarrow \alpha}{=} o(c)$ où $c \in \mathbb{R}^*$.

Remarque 1.1.

Il faut bien comprendre et garder à l'esprit que la négligeabilité en un point n'entraîne nullement la négligeabilité ailleurs. Il suffit de regarder l'exemple (i) ci-dessus

$$x^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x), \quad \text{mais} \quad x^2 \not\underset{x \rightarrow 2}{=} o(x) \quad \text{et} \quad x^2 \not\underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x).$$

On comprend l'importance de ne pas simplement écrire $f(x) = o(g(x))$ sans préciser le voisinage concerné!

Théorème 1.6.**Croissances comparées**

Soient r, s des réels.

i. On a

$$r < s \Rightarrow x^r \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^s) \quad \text{et} \quad r < s \Rightarrow x^s \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^r).$$

En d'autres termes, "les grandes puissances l'emportent au voisinage de $+\infty$, et les petites au voisinage de 0".

ii. Si $r > 0$, on a

$$x^r \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^x), \quad \ln x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^r) \quad \text{et} \quad \ln x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{rx}).$$

En d'autres termes, "au voisinage de $+\infty$, l'exponentielle l'emporte sur les puissances qui l'emportent sur le logarithme".

Exercice 1.4.

Calculer les limites de $x \mapsto x^x$ aux bornes de son domaine de définition.

Définition 1.5.**Domination**

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage V de $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que g ne s'annule pas sur V .

On dit que f **est dominée par** g au voisinage de α si et seulement si $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ est bornée sur V .

On note $f(x) \underset{x \rightarrow \alpha}{=} O(g(x))$ ou $f(x) = O(g(x))$, $x \rightarrow \alpha$.

Proposition 1.7.

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. On a alors:

$$f(x) \underset{x \rightarrow \alpha}{=} o(g(x)) \implies f(x) \underset{x \rightarrow \alpha}{=} O(g(x)).$$

Définition 1.6.**Quantités équivalentes**

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage V de $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que g ne s'annule pas sur V .

On dit que $f(x)$ est **équivalent** à $g(x)$ au voisinage de α si et seulement si $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

On note $f(x) \underset{x \rightarrow \alpha}{\sim} g(x)$ ou $f(x) \sim g(x)$, $x \rightarrow \alpha$.

Exercice 1.5.

Interpréter le résultat de l'**Exercice ??** comme un équivalent au voisinage de 0. Qu'en est-il au voisinage de $+\infty$?

☞ On remarquera qu'il découle immédiatement de la définition que, si $\ell \in \mathbb{R}^*$,

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \ell \iff f(x) \underset{x \rightarrow \alpha}{\sim} \ell.$$

Proposition 1.8.

Toute fonction polynomiale est équivalente à son monôme de plus haut degré en $\pm\infty$.

Toute fonction polynomiale est équivalente à son monôme de plus bas degré en 0.

☞ Par exemple,

$$2x^7 - 18x^3 + 91 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2x^7, \quad \text{ou encore} \quad -12x^3 + 2x^2 + 5x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 5x.$$

Proposition 1.9.

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage V de $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

- i. On peut traduire un équivalent à l'aide d'une égalité au voisinage de α :

$$f(x) \underset{x \rightarrow \alpha}{\sim} g(x) \iff f(x) = g(x) + o(g(x)).$$

☞ La réciproque indique notamment qu'on peut négliger les termes négligeables dans une somme. Ainsi :

$$f(x) + o(f(x)) \underset{x \rightarrow \alpha}{\sim} f(x).$$

- ii. Deux quantités équivalentes au voisinage d'un point ont la même limite en ce point. La réciproque est fautive bien entendu.

$$f(x) \underset{x \rightarrow \alpha}{\sim} g(x) \implies \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x).$$

Exercice 1.6.

Utiliser des équivalents pour déterminer les limites suivantes.

$$(i) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x^3 - \ln(x); \quad (ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - \ln(x)}{\sqrt{e^x + x^3}}; \quad (iii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + x^3)}{\ln(x)}.$$

Remarque 1.2.

Il existe un certain nombre d'erreurs classiques sur les équivalents, auxquelles il faut prendre garde.

- i. **On ne peut pas sommer les équivalents:**

$$f(x) \underset{x \rightarrow \alpha}{\sim} g(x) \text{ n'implique pas } (f + h)(x) \underset{x \rightarrow \alpha}{\sim} (g + h)(x).$$

On a par exemple $-x^3 + x^2 \underset{+\infty}{\sim} -x^3 + x$, et pourtant on n'a pas $x^2 \underset{+\infty}{\sim} x!$

- ii. **On ne peut pas élever une équivalence à une puissance dépendant de x :**

$$f(x) \underset{x \rightarrow \alpha}{\sim} g(x) \text{ n'implique pas } f(x)^{h(x)} \underset{x \rightarrow \alpha}{\sim} g(x)^{h(x)}.$$

On a par exemple $2^{1/x} \underset{+\infty}{\sim} 1$, et pourtant $(2^{1/x})^x \underset{+\infty}{\sim} 1^x$ est inexact.

- iii. **On ne peut pas composer à gauche des équivalents:**

$$f \sim g \text{ n'implique pas } h \circ f \sim h \circ g.$$

On a par exemple $x^2 + x \underset{+\infty}{\sim} x^2$, mais par contre on n'a pas $e^{x^2+x} \underset{+\infty}{\sim} e^{x^2}$.

- iv. On peut toutefois effectuer des produits d'équivalents, ou élever une équivalence à une puissance constante.

Exercice 1.7.

Montrer que : $\exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) - x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -x \ln(x)$

2 Continuité d'une fonction à valeurs réelles**Définition 1.7.**

Continuité en x_0

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit que :

✕ f est **continue** en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, (|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

✕ f est **continue à droite** (resp. **à gauche**) de x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ (resp. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$).

Exemple 1.3.

La fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ 1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$ n'est pas continue en 0.

Théorème 1.10.**Caractérisation séquentielle de la continuité**

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

Les assertions suivantes sont équivalentes.

- i. f est continue en x_0 ;
- ii. Pour toute suite numérique $(u_n)_{n \geq 0}$ (dont les termes appartiennent à un *voisinage* de x_0 à partir d'un certain rang) qui converge vers x_0 , on a que la suite $(f(u_n))_{n \geq 0}$ converge vers $f(x_0)$.

Définition 1.8.**Continuité sur un intervalle**

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est **continue sur** I si elle est continue en chacun des réels $x_0 \in I$.

Remarque 1.3.

Il a été dit en Terminale que les fonctions continues sont celles que l'on peut "tracer sans lever le stylo". Cette notion est informelle et ne peut donc pas être utilisée dans une démonstration, mais il peut être utile de la garder à l'esprit puisqu'elle permet d'appréhender la majorité des exemples rencontrés au concours.

Exercice 1.8.

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

☞ Il est possible de rencontrer des fonctions qui ne sont continues nulle part (voir par exemple l'[Exercice ??](#)).

Théorème 1.11.**Théorème des valeurs intermédiaires, 1^{ère} version**

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et $a \leq b$ deux réels de I . Si $f(a)f(b) \leq 0$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Exemple 1.4.

Considérons une fonction polynomiale de la forme $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

Puisque $f(x) \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow +\infty$, on en déduit que f est à valeurs positives pour x supérieur à un réel A donné.

De même, comme $f(x) \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow -\infty$, il vient que f est à valeurs négatives pour x inférieur à un réel A' donné.

On déduit du théorème des valeurs intermédiaires (appliqué à f sur $[A', A]$) que f s'annule en au moins un réel $x \in [A', A]$.

☞ On a ainsi démontré que toute fonction polynomiale de degré 3 possède une racine réelle (ce résultat se généralise à tous les polynômes de degré impair).

Exercice 1.9.

Montrer que toute fonction continue $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ admet au moins un point fixe.

Théorème 1.12.**Théorème des valeurs intermédiaires, 2^{nde} version**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et $a \leq b$ deux réels de I . Alors pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

☞ Attention, le théorème des valeurs intermédiaires (TVI pour les intimes) ne permet pas de compter le nombre d'antécédents d'une valeur de l'intervalle image. Pour cela, on utilise plutôt le corollaire suivant.

Théorème 1.13.**Théorème de la bijection monotone**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone et continue. Alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$, sa bijection réciproque $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ est continue sur $f(I)$, et elle est de même monotonie que f .

Exercice 1.10.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation

$$(E_n) \quad e^x - x = n.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) admet exactement deux solutions réelles α_n et β_n telles que $\alpha_n < 0 < \beta_n$.
2. Montrer que $(\beta_n)_{n \geq 1}$ est croissante et déterminer sa limite.

On rappelle qu'un segment est un intervalle fermé et borné de la forme $[a, b]$. Le résultat suivant indique que toute fonction continue sur un segment y possède une valeur maximale et une valeur minimale, ou autrement dit que **toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes**.

Théorème 1.14.**Théorème des bornes atteintes**

Soient $a \leq b$ des réels, et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Il existe alors $(\alpha, \beta) \in [a, b]^2$ tels que

$$\forall x \in [a, b], \quad f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta).$$

Plus précisément,

$$f(\alpha) = \inf_{t \in [a, b]} f(t) = \min_{t \in [a, b]} f(t), \quad f(\beta) = \sup_{t \in [a, b]} f(t) = \max_{t \in [a, b]} f(t).$$

☞ Ce résultat n'est plus vrai si l'on considère une fonction continue sur un intervalle quelconque. Prenons par exemple la fonction définie par $f(x) = x$ sur l'intervalle $]0, 1]$. On a $\inf_{x \in]0, 1]} f(x) = 0$, et pourtant f ne prend jamais la valeur 0.

Exercice 1.11.

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^n f(x) dx$.

3 Dérivabilité d'une fonction à valeur réelle**Définition 1.9.****Taux d'accroissement**

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. On appelle **taux d'accroissement** de f en x_0 , et l'on note Δ_{f, x_0} , la fonction définie pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$ par:

$$\Delta_{f, x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Définition 1.10.**Dérivabilité en x_0**

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$.

- ✗ On dit que f est **dérivable en x_0** si son taux d'accroissement admet une limite finie en x_0 ; on note alors $f'(x_0)$ cette limite.
- ✗ On dit que f est **dérivable à droite** (resp. **à gauche**) de x_0 si son taux d'accroissement admet une limite finie en x_0^+ (resp. x_0^-).

Théorème 1.15.

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. On a alors

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \iff \begin{cases} f \text{ est dérivable à gauche et à droite en } x_0 \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \Delta_{f, x_0}(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \Delta_{f, x_0}(x) \end{cases}$$

Proposition 1.16.

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage V de x_0 . Alors

$$f \text{ dérivable en } x_0 \implies f \text{ continue en } x_0.$$

Preuve. On peut écrire (pour $x \neq x_0$ dans un voisinage de x_0)

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\Delta_{f,x_0}(x).$$

Il est alors immédiat que si f dérivable en x_0 , $\Delta_{f,x_0}(x)$ admet une limite finie lorsque $x \rightarrow x_0$ et donc $f(x) \rightarrow f(x_0)$, ce qui signifie que f est continue en x_0 . $\square$

La réciproque est bien évidemment fausse !

Exercice 1.12.

La fonction f de l'Exercice ?? est-elle dérivable en 0 ?

Proposition 1.17.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en x_0 . On appelle **tangente à la courbe représentative** de f au point d'abscisse a la droite passant par le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ et de coefficient directeur $f'(a)$. Cette tangente admet donc pour équation :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

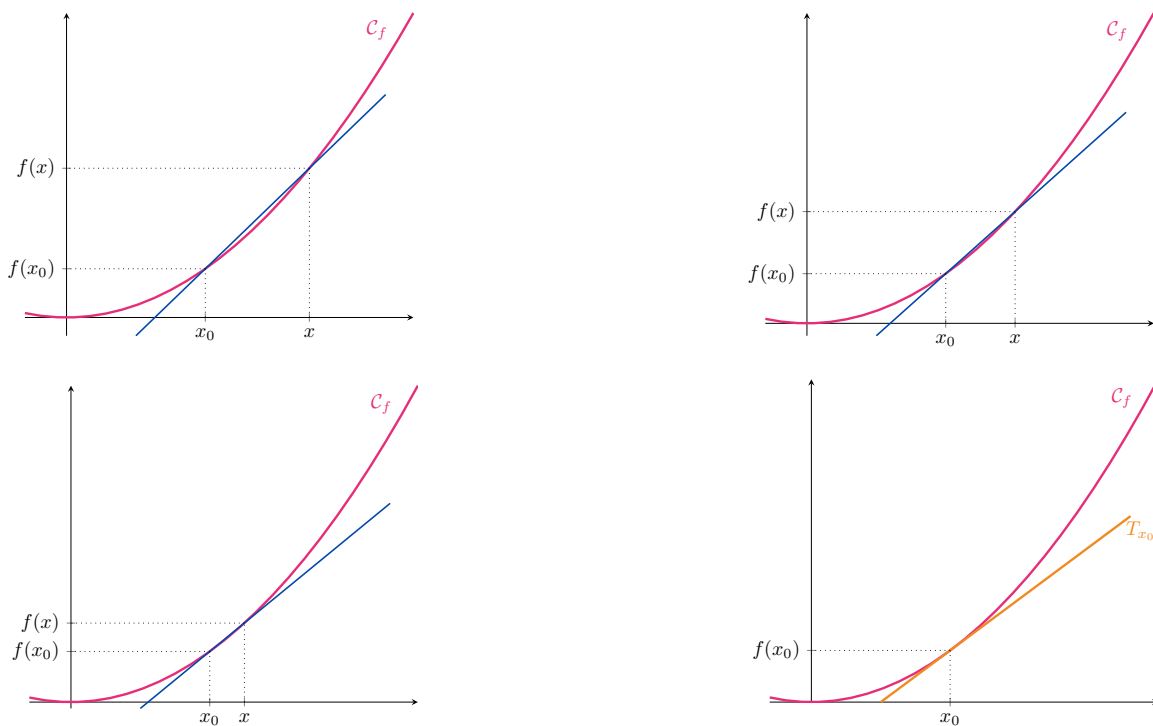


Illustration. La tangente en x_0 comme "limite" des cordes.

Proposition 1.18.

Dérivée d'une composée

Soit J un intervalle véritable de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $x_0 \in I$.

On suppose f dérivable en x_0 et g dérivable en $f(x_0)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 , et on a :

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0).$$

Proposition 1.19.

Dérivée de la bijection réciproque

Soient J un intervalle véritable de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow J$ une fonction bijective, $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0) \in J$.

On suppose de plus que f est dérivable en x_0 . Si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en y_0 , de sorte que

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Définition 1.11.**Extremum local**

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point intérieur à I . On dit que f présente un **extremum local** en x_0 s'il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que

$$\forall x \in V(x_0), \quad f(x) - f(x_0) \text{ est de signe constant.}$$

Lorsque ce signe est positif (resp. négatif), on parle de **minimum local** (resp. **maximum local**).

Proposition 1.20.**Extremum local et dérivée : condition nécessaire**

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point intérieur à I où f est dérivable.

Si f admet un extremum (local) en x_0 , alors nécessairement $f'(x_0) = 0$.

Preuve. Considérons un voisinage V de x_0 sur lequel $f(x) - f(x_0)$ est constant. Alors, pour $x \in V$, Δ_{f,x_0} est de signe opposé lorsque $x < x_0$ et $x > x_0$. La limite, qui est égale à $f'(x_0)$ par hypothèse, est alors à la fois positive (ou nulle) et négative (ou nulle). Elle est donc nulle. $\square$

3.1 Propriétés globales des fonctions dérivables

Dans cette section, les lettres a et b désigneront deux réels tels que $a < b$.

Théorème 1.21.**Théorème de Rolle**

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que :

- i. f est continue sur $[a, b]$;
- ii. f est dérivable sur $]a, b[$;
- iii. $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 1.13.

Soit f une fonction dérivable admettant $n \geq 2$ racines distinctes. Alors f' admet au moins $n - 1$ racines distinctes.

Théorème 1.22.**Égalité des accroissements finis**

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que :

- i. f est continue sur $[a, b]$;
- ii. f est dérivable sur $]a, b[$.

Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c) \times (b - a)$.

☞ Il n'existe pas de méthode simple et générale permettant de calculer la valeur de c .

☞ Il n'y a pas unicité du point c .

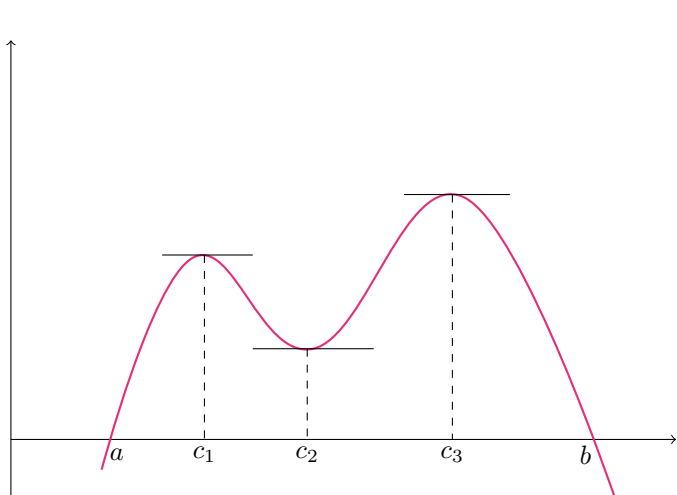


Illustration du Théorème de Rolle.

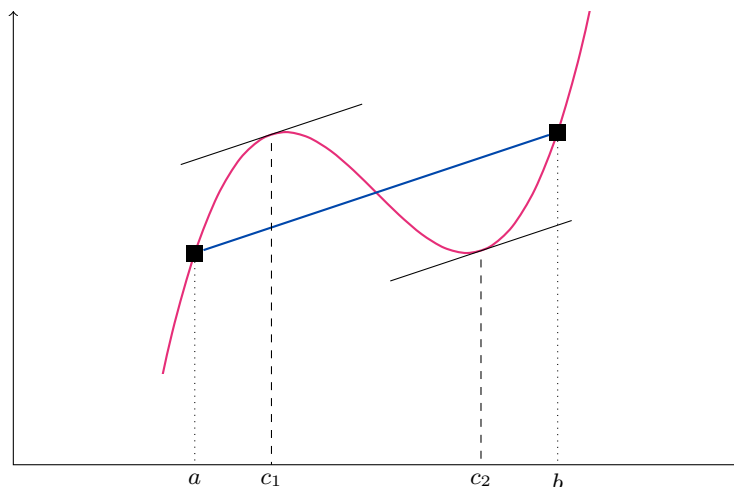


Illustration de l'égalité des accroissements finis.

Théorème 1.23.**Inégalité des accroissements finis**

Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et m, M deux réels. On suppose que :

- i. f est continue sur $[a, b]$;
- ii. f est dérivable sur $]a, b[$;
- iii. $\forall x \in]a, b[, m \leq f'(x) \leq M$.

Alors on a :

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

Le résultat suivant indique que, sous certaines conditions, la connaissance de $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ permet de déterminer la valeur de

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Théorème 1.24.**Théorème de la limite de la dérivée**

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $x_0 \in I$ et $\ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que :

- i. f est continue sur I ;
- ii. f est dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$;
- iii. $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f'(x) = \ell_2$.

On a alors :

1. Si $\ell_2 \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en x_0 de sorte que $f'(x_0) = \ell_2$;
2. Si $\ell_2 = \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en x_0 .

Définition 1.12.**Fonction de classe $\mathcal{C}^1$**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^1$** sur I si f est dérivable sur I et f' est continue sur I .

Théorème 1.25.**Théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$**

Soient $x_0 \in I$, $f : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et ℓ_1, ℓ_2 des réels. On suppose que :

- i. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{x_0\}$;
- ii. $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = \ell_1$;
- iii. $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f'(x) = \ell_2$.

Alors, f se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur I , et plus précisément:

1. f se prolonge par continuité en x_0 en une fonction $\tilde{f}$;
2. $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;
3. $\tilde{f}(x_0) = \ell_1$ et $\tilde{f}'(x_0) = \ell_2$.

Exercice 1.14.

Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x > 0 \\ x^3, & \text{si } x < 0 \end{cases}$ est prolongeable sur $\mathbb{R}$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$,

et que la fonction g définie par $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x > 0 \\ x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$ ne l'est pas.

3.2 Dérivées successives

Définition 1.13.

Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- ✗ On dit que f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur I si f est continue sur I .
- ✗ On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et f' est continue sur I .
- ✗ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f est dérivable sur I et f' est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur I .
- ✗ On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si f est de classe $\mathcal{C}^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On note :

- ✗ $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et à valeurs réelles.
- ✗ $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et à valeurs réelles.
- ✗ $f^{(k)}$ la **dérivée** k -ème de f . Par convention, on a donc $f^{(0)} = f$.

☞ Il existe des fonctions dérivables en tout point et qui ne sont pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Exemple 1.5.

La fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est dérivable mais pas $\mathcal{C}^1$ en 0.

Théorème 1.26.

Formule de Leibniz

Soient $n \in \mathbb{N}$, et $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$. Alors $f \times g$ est de classe $\mathcal{C}^n$, de sorte que

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}.$$

Remarque 1.4.

La formule ci-dessus peut sembler, dans son écriture, proche de celle du binôme de Newton. Mais d'une part elle ne fait pas apparaître des puissances mais des dérivées, et d'autre part son sens est très différent, puisqu'elle permet de calculer la dérivée n -ième d'un produit (et non de développer la puissance n -ième d'une somme).

Exercice 1.15.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la dérivée n -ième de $f : x \mapsto (x^2 + 1)e^{2x}$.

Exercice 1.16.

Polynômes de Legendre, Extrait Mathématiques A 2025

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$U_n(X) = (X^2 - 1)^n \quad \text{et} \quad P_n(X) = U_n^{(n)}(X).$$

On rappelle que si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $P^{(n)}$ la dérivée n -ème du polynôme P . On remarque que $U_0(X) = P_0(X) = 1$.

1. Calculer P_1 et P_2 .
2. Déterminer le degré de U_n puis celui de P_n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. On fixe $n \in \mathbb{N}$.

a. Vérifier que :

$$(X^2 - 1)U'_n = 2nXU_n \quad (E)$$

b. Rappeler la formule de Leibniz exprimant la dérivée p -ème d'un produit de deux polynômes, pour $p \in \mathbb{N}$.

c. En dérivant $n + 1$ fois l'égalité (E), montrer que :

$$\varphi(P_n) = n(n + 1)P_n.$$

On pourra utiliser cette égalité dans les parties suivantes.

4 Formules de Taylor pour une fonction à valeurs réelles

Les lettres a et b désigneront dans cette section deux réels tels que $a < b$. Nous allons énoncer les *formules de Taylor*, qui généralisent le théorème des accroissements finis aux fonctions plusieurs fois dérivables.

Elles permettent d'écrire toute fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$ sous la forme d'une somme d'un polynôme de degré n et d'un reste :

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + R_n.$$

Dans les théorèmes qui suivent, on établit certaines propriétés de ce reste.

Théorème 1.27.

Formule de Taylor avec reste intégral

Soient $n \in \mathbb{N}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I , alors pour tout $x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

Et si on considère une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n dt.$$

☞ Cette formule n'est pas exigible au concours. Elle se démontre par récurrence, par intégrations par parties successives. Par contre il faut connaître les deux suivantes.

Le résultat suivant majore l'erreur commise lors de l'approximation de $f(b)$ par le polynôme de Taylor de f en a . La preuve découle immédiatement de la formule de Taylor avec reste intégral et de l'inégalité triangulaire.

Théorème 1.28.

Inégalité de Taylor-Lagrange

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. On a :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Exercice 1.17.

Écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour l'exponentielle sur l'intervalle $[0, x]$.

☞ La formule suivante permet d'obtenir les développements limités.

Théorème 1.29.

Formule de Taylor-Young

Soit $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un voisinage V de x_0 .

Alors f admet un développement limité à l'ordre n donné par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0.$$

En posant $x = x_0 + h$, il vient :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + o(h^n), \quad h \rightarrow 0.$$

Remarque 1.5.

La formule de Taylor-Young a l'avantage d'être plus simple que les précédentes, mais l'inconvénient de ne proposer qu'une approximation locale, c'est-à-dire qu'elle n'est pertinente que lorsque x tend vers x_0 .

Exercice 1.18.

Déterminer un DL₃(0) de la fonction $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2/2} dt$.

5 Fonctions à valeurs réelles usuelles

5.1 Les fonctions hyperboliques

Définition 1.14.

Fonctions hyperboliques

On appelle **cosinus hyperbolique** et **sinus hyperbolique**, et l'on note (respectivement) ch et sh les fonctions définies pour tout réel x par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{et} \quad \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

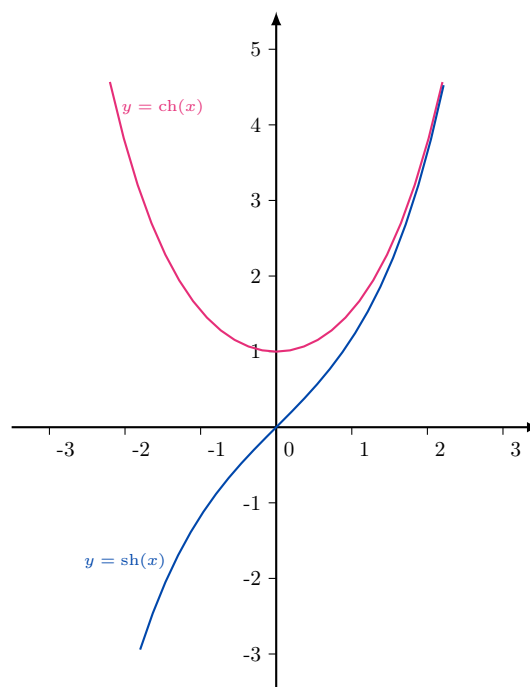
Proposition 1.30.

On a les résultats suivants.

- i. La fonction ch est paire, et sh est impaire;
- ii. Pour tout réel x on a $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$;
- iii. Les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de sorte que $\text{ch}' = \text{sh}$ et $\text{sh}' = \text{ch}$.

On peut alors tracer les tableaux de variation de ch et sh , puis en déduire leur courbe représentative.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
ch	$+\infty$	1	$+\infty$
sh	$-\infty$	0	$+\infty$



5.2 Les fonctions puissances

Définition 1.15.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $x > 0$, on appelle x puissance a et l'on note x^a la quantité définie par

$$x^a = e^{a \ln x}.$$

⇒ Pour effectuer un calcul complexe avec une quantité de la forme u^v , on revient à la définition en écrivant $u^v = e^{v \ln u}$.

Exercice 1.19.

Calculer la dérivée de la fonction f définie par $f : x \mapsto x^x$.

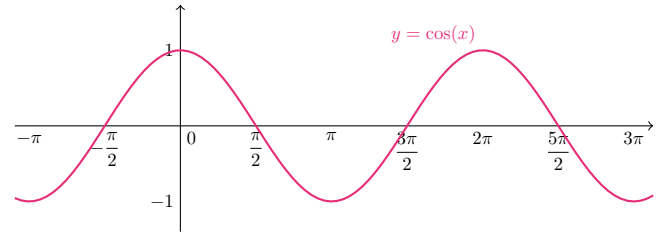
5.3 Les fonctions trigonométriques et leurs réciproques

Cosinus et arccosinus.

Proposition 1.31.

La fonction cosinus est dérivable, et sa dérivée est donnée par $(\cos)' = -\sin$.

On obtient alors le graphe ci-contre en considérant par ailleurs que la fonction cosinus est paire et 2π -périodique.



La fonction $\cos$ ne réalise pas une bijection: pour tout réel $y \in [-1, 1]$ l'équation $y = \cos x$ admet une infinité de solutions (le cosinus est périodique). Néanmoins, le cosinus est strictement décroissant sur $[0, \pi]$, ce qui permettra de l'inverser sous réserve de le restreindre à $[0, \pi]$.

Proposition 1.32.

La fonction $\cos|_{[0, \pi]}$ réalise une bijection strictement décroissante de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.

Définition 1.16.**Arccosinus**

On appelle **arccosinus**, et on note $\arccos$, la bijection réciproque de la fonction $\cos|_{[0, \pi]}$.

On a donc

$$\forall y \in [-1, 1], \cos(\arccos y) = y \quad \text{et} \quad \forall x \in [0, \pi], \arccos(\cos x) = x.$$

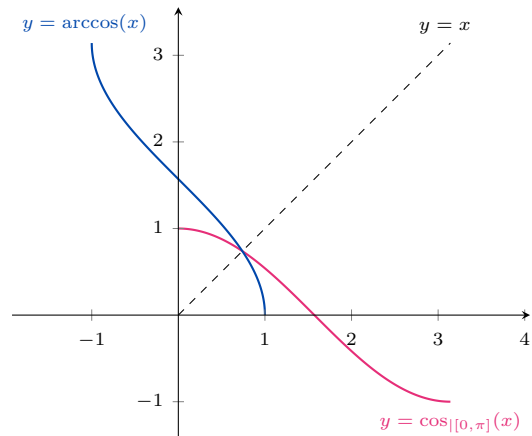
En d'autres termes, si $y \in [-1, 1]$, $\arccos(y)$ est l'unique $x \in [0, \pi]$ tel que $\cos x = y$.

Proposition 1.33.

On a les résultats suivants.

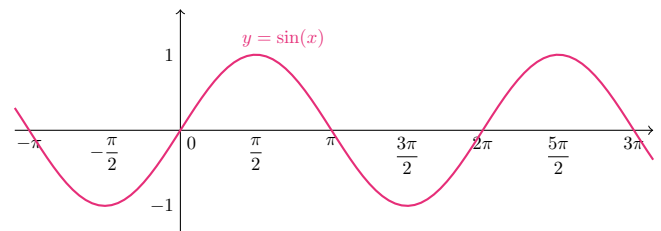
- i. La fonction $\arccos$ réalise une bijection continue et strictement décroissante de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$.
- ii. La fonction $\arccos$ est dérivable sur $] -1, 1[$, de sorte que:

$$\forall x \in] -1, 1[, \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

**Sinus et arcsinus.****Proposition 1.34.**

La fonction sinus est dérivable, et sa dérivée est donnée par $(\sin)' = \cos$.

On obtient alors le graphe ci-contre en considérant par ailleurs que la fonction sinus est impaire et 2π -périodique.



De même on restreint le sinus à un intervalle où il est strictement monotone pour pouvoir l'inverser.

Proposition 1.35.

La fonction $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ réalise une bijection strictement croissante de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$.

Définition 1.17.**Arcsinus**

On appelle **arcsinus**, et on note $\arcsin$, l'inverse de la fonction $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$.

On a donc

$$\forall y \in [-1, 1], \sin(\arcsin y) = y \quad \text{et} \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \arcsin(\sin x) = x.$$

En d'autres termes, si $y \in [-1, 1]$, $\arcsin(y)$ est l'unique $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin x = y$.

Exercice 1.20.

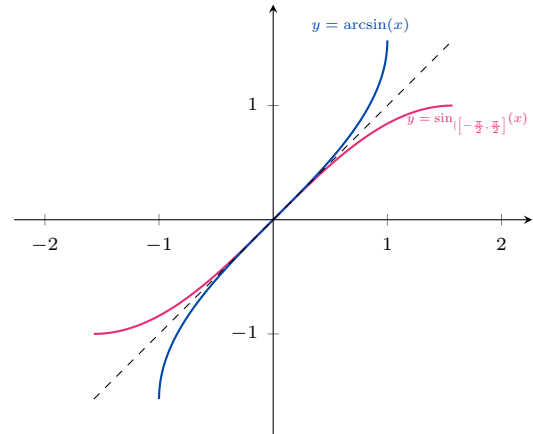
Calculer $\arcsin(1)$ puis $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$.

Proposition 1.36.

On a les résultats suivants.

- i. La fonction $\arcsin$ réalise une bijection continue et strictement croissante de $[-1, 1]$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- ii. La fonction $\arcsin$ est dérivable sur $] -1, 1[$, de sorte que:

$$\forall x \in] -1, 1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

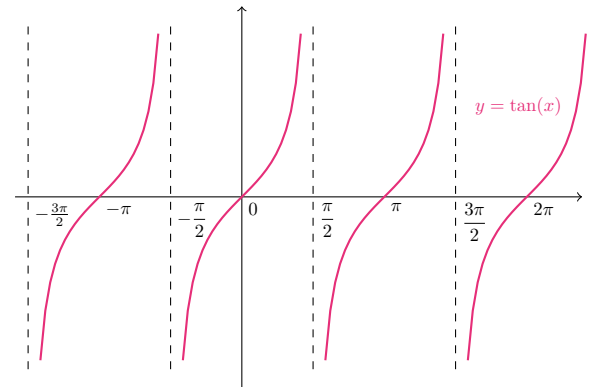
**Tangente et arctangente.****Proposition 1.37.**

La fonction tangente est définie sur

$$\mathcal{D} = \left\{ x \in \mathbb{R}; \forall k \in \mathbb{Z}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}.$$

Sur $\mathcal{D}$, la fonction tangente est dérivable, impaire et π -périodique, et sa dérivée est donnée par

$$(\tan)' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2.$$

**Proposition 1.38.**

La fonction $\tan|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$ réalise une bijection strictement croissante de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.18.

On appelle **arctangente**, et on note $\arctan$, l'inverse de la fonction $\tan|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$.

Arctangente

On a donc

$$\forall y \in \mathbb{R}, \tan(\arctan y) = y \quad \text{et} \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \arctan(\tan x) = x.$$

En d'autres termes, si $y \in \mathbb{R}$, $\arctan(y)$ est l'unique $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(x) = y$.

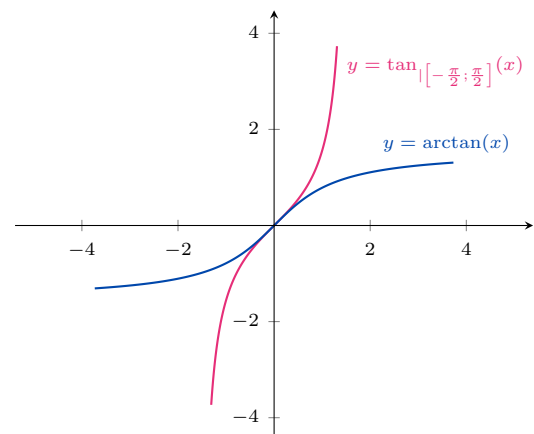
Proposition 1.39.

On a les résultats suivants.

- i. La fonction $\arctan$ réalise une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
- ii. La fonction $\arctan$ est dérivable, de sorte que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}.$$



Exercice 1.21.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \pm \frac{\pi}{2}$.

6 Développements limités usuels de fonctions à valeurs réelles

On rappelle quelques développements usuels, à connaître sur le bout des doigts.

Théorème 1.40.**DL usuels en 0**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a les développements limités suivants.

$$\begin{aligned}
 e^x &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \\
 \cos(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \\
 \sin(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \\
 \tan(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\
 \arctan(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \\
 \ln(1+x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \\
 (1+x)^\alpha &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n) \\
 \frac{1}{1-x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n) \\
 \operatorname{ch}(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \\
 \operatorname{sh}(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})
 \end{aligned}$$

Remarque 1.6.

- ☞ Dans l'énoncé ci-dessus, tous les développements donnés sont à l'ordre n , sauf celui de $\cos$ qui est à l'ordre $2n$, ainsi que ceux de $\sin$ et $\arctan$ qui sont à l'ordre $2n+1$.
- ☞ On peut démontrer aisément que si une fonction paire (resp. impaire) admet un développement limité, alors celui-ci ne fait apparaître que des termes d'ordre pair (resp. impair).

- ☞ On peut additionner, soustraire, multiplier, composer et intégrer (mais pas toujours dériver...) des développements limités.
- ☞ Pour calculer un développement limité d'une fonction $x \mapsto f(x)$ en $x_0 \neq 0$ on effectue un changement de variable, en posant $x = x_0 + h$, avec h qui tend vers 0. On calcule alors un DL(0) de $h \mapsto f(x_0 + h)$, puis on revient au développement recherché en posant $h = x - x_0$.

- ⇒ Pour calculer un développement *asymptotique* d'une fonction $x \mapsto f(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ on effectue un changement de variable, en posant $t = 1/x$, avec t qui tend vers 0. On calcule alors un DL(0) de $t \mapsto f(1/t)$, puis on revient au développement recherché en revenant à x .
- ⇒ Deux développements limités sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients.

Exercice 1.22.

Donner un DL₄(0) de $\ln(\cos(h))$.

Exercice 1.23.

Donner un développement de $\sqrt{1+x^2}$ au voisinage de $+\infty$, à la précision $\frac{1}{x}$. Interprétation graphique?

7 Fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles

Dans cette dernière section, n désigne un entier naturel égal à 2 ou 3. On considère alors l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne, et on fixe un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, e_1, \dots, e_n)$.

Le produit scalaire canonique est noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et la norme associée $\| \cdot \|$.

On note aussi d la distance euclidienne associée :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad d(x, y) = \|x - y\|.$$

7.1 Définitions

Définition 1.19.

Une fonction f définie sur I est dite à valeurs vectorielles s'il existe un espace vectoriel E tel que, pour tout $t \in I$, $f(t) \in E$.

⇒ Si E est de dimension finie n , on peut fixer une base de celui-ci. Ainsi, on peut faire correspondre à tout fonction $f : I \rightarrow E$ à valeurs vectorielle une fonction

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

telle que, pour tout $t \in I$, $f(t)$ est égal aux coordonnées du vecteurs $f(t)$ dans la base choisie. Cette observation permet de se ramener à l'étude des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.20.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. On appelle **fonctions coordonnées** de f les fonctions $x_1, \dots, x_n$ définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall t \in I, \quad f(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

Exemple 1.6.

Notons $\vec{\mathcal{P}}$ le plan vectoriel euclidien usuel et $(\vec{i}, \vec{j})$ sa base canonique.

La fonction $f : t \in [0, 2\pi[\mapsto \cos(t) \vec{i} + \sin(t) \vec{j}$ est une fonction à valeurs vectorielles qui correspond à l'application $f : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Les fonctions coordonnées sont $x_1 : t \mapsto \cos(t)$ et $x_2 : t \mapsto \sin(t)$.

7.2 Limites et continuité

Sans surprise, la notion de limite étend celle qu'on connaît déjà à l'aide de la distance d donnée par la norme; on dira que $f(t)$ tend vers ℓ si la distance entre les deux vecteurs tend vers 0.

Définition 1.21.

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ à valeurs vectorielles, ℓ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \bar{I}$.

On dit que $f(t)$ tend vers ℓ lorsque t tend vers α , ce qu'on note $\lim_{t \rightarrow \alpha} f(t) = \ell$ si

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} d(f(t), \ell) = 0$$

ce qui équivaut à

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} \|f(t) - \ell\| = 0.$$

Cette notion de limite se ré-exprime à l'aide des fonctions coordonnées. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Proposition 1.41.

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x_1, \dots, x_n$ ses fonctions coordonnées, ℓ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $(\ell_1, \dots, \ell_n)$, et $\alpha \in \bar{I}$. Alors,

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} f(t) = \ell \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lim_{t \rightarrow \alpha} x_i(t) = \ell_i.$$

Preuve. Commençons par observer que, pour tout $t \in I$,

$$\|f(t) - \ell\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i(t) - \ell_i)^2}.$$

Le sens $\Leftarrow$ est immédiat par continuité de la fonction carrée puis par somme et continuité de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+$. Réciproquement, supposons $\|f(t) - \ell\| \rightarrow 0$. Alors, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$0 \leq (x_i - \ell_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i(t) - \ell_i)^2 \xrightarrow[t \rightarrow \alpha]{} 0,$$

par hypothèse et continuité de la fonction carrée.

Le théorème des gendarmes permet de conclure. □

Maintenant qu'on dispose de la notion de limite, on peut définir la notion de continuité pour une fonction à valeurs vectorielles.

Définition 1.22.

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $t_0 \in I$. On dit que f est **continue en** t_0 si $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0)$.

Si f est continue en tout point $t_0 \in I$, on dit alors que f est **continue sur** I .

La proposition ci-dessous donne immédiatement le résultat suivant qui permet d'affirmer que la continuité d'une fonction à valeurs vectorielles est caractérisée par la continuité de ses fonctions coordonnées.

Proposition 1.42.

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x_1, \dots, x_n$ ses fonctions coordonnées et $t_0 \in \bar{I}$.

Alors,

$$f \text{ est continue en } t_0 \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \text{ est continue en } t_0.$$

Les théorèmes généraux sur la continuité des fonctions d'une variable réelle s'étendent alors de manière immédiate aux fonctions à valeurs vectorielles.

Proposition 1.43.**Théorèmes généraux**

La somme, le produit par un scalaire, le produit scalaire, le produit vectoriel (s'il est défini) de fonctions à valeurs vectorielles continues sur I est encore une fonction (à valeurs vectorielles) continue sur I .

7.3 Dérivabilité

Définition 1.23.

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $t_0 \in I$. On dit que f est **dérivable en** t_0 si

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} (f(t) - f(t_0))$$

existe et est finie (et élément de $\mathbb{R}^n$). Auquel cas, cette limite sera notée

$$f'(t_0) \quad \text{ou} \quad \frac{df}{dt}(t_0).$$

Si f est dérivable en tout point $t_0 \in I$, on dit alors que f est **dérivable sur** I et la fonction f' est appelée **dérivée de** f .

Comme précédemment avec la continuité, on établit une caractérisation de la dérivabilité de f sur ses fonctions coordonnées.

Proposition 1.44.

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x_1, \dots, x_n$ ses fonctions coordonnées et $t_0 \in \bar{I}$.

Alors,

$$f \text{ est dérivable en } t_0 \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \text{ est dérivable en } t_0.$$

Lorsque c'est le cas, on a même

$$\frac{df}{dt}(t_0) = (x'_1(t_0), \dots, x'_n(t_0)).$$

☞ **Pour dériver une fonction à valeurs vectorielles, il suffit donc de dériver ses fonctions coordonnées.**

Preuve. Il suffit d'observer que, pour tout $t \in I \setminus \{t_0\}$,

$$\frac{1}{t - t_0} (f(t) - f(t_0)) = \frac{1}{t - t_0} (x_1(t) - x_1(t_0), \dots, x_n(t) - x_n(t_0))$$

et d'appliquer le résultat de la **Proposition 1.??**. avec la définition de dérivabilité d'une fonction à valeurs réelles. $\square$

La dérivation coordonnée par coordonnée permet notamment d'obtenir les résultats suivants.

Proposition 1.45.

Théorèmes généraux

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ des fonctions dérivables sur I , $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\varphi : J \rightarrow I$, où J est un intervalle (non trivial) de $\mathbb{R}$. Alors,

- i. $\lambda f + \mu g$ est encore dérivable sur I , et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.
- ii. $f \circ \varphi$ est dérivable sur J , et $(f \circ \varphi)' = \varphi' \times (f' \circ \varphi)$.
- iii. La fonction $t \in I \mapsto \langle f(t) \mid g(t) \rangle$ est dérivable sur I et $\langle f \mid g \rangle' = \langle f' \mid g \rangle + \langle f \mid g' \rangle$.
- iv. Si elle a un sens, la fonction $t \in I \mapsto \det(f(t), g(t))$ est dérivable sur I et $\det(f, g)' = \det(f', g) + \det(f, g')$.
- v. Si elle a un sens, la fonction $t \in I \mapsto f(t) \wedge g(t)$ est dérivable sur I et $[f \wedge g]' = f' \wedge g + f \wedge g'$.
- vi. Si, pour tout $t \in I$, $f(t) \neq 0$, alors $t \mapsto \|f(t)\|$ est dérivable sur I et $\|f\|' = \frac{\langle f' \mid f \rangle}{\|f\|}$.

7.4 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ et formule de Taylor-Young

Définition 1.24.

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ (sur I) si f est dérivable k fois (sur I) et si sa dérivée k -ème $f^{(k)}$ est continue (sur I).

L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ sera noté $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$.

Enfin, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (sur I) si elle est de classe $\mathcal{C}^k$ (sur I) pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^k$ (sur I), on note aussi, pour $t \in I$,

$$\frac{d^k f}{dt}(t) = f^{(k)}(t).$$

Naturellement, encore une fois, la fonction f sera de classe $\mathcal{C}^k$ si et seulement si toutes ses fonctions coordonnées le sont, et on obtient l'expression de $f^{(k)}$ à l'aide des dérivées k -ème des fonctions coordonnées de f .

$$\forall t \in I, \quad f^{(k)}(t) = (x_1^{(k)}(t), \dots, x_n^{(k)}(t)).$$

Proposition 1.46.

Formules de Leibniz

Soient $m \in \mathbb{N}$ et $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^m$ sur I . Alors, $\langle f | g \rangle$ et $f \wedge g$ sont encore de classe $\mathcal{C}^m$ sur I , et

$$\langle f | g \rangle^{(m)} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \langle f^{(k)} | g^{(m-k)} \rangle \quad \text{et} \quad (f \wedge g)^{(m)} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} f^{(k)} \wedge g^{(m-k)}.$$

Si $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^m$ sur I , alors $t \mapsto \varphi(t)f(t)$ est encore de classe $\mathcal{C}^m$ sur I et

$$(\varphi f)^{(m)} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \varphi^{(k)} f^{(m-k)}.$$

Preuve. La démonstration est admise mais le résultat se montre par récurrence. □

Théorème 1.47.

Formule du Taylor-Young

Soient $m \in \mathbb{N}$, f une fonction de classe $\mathcal{C}^m$ sur I et $t_0 \in I$. Alors, pour tout h dans un voisinage de 0, on peut écrire

$$f(t_0 + h) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} h^k + o(h^m),$$

où $o(h^m)$ désigne un vecteur dont toutes les coordonnées sont négligeables devant h^m .

Preuve. Il suffit d'appliquer la formule de Taylor-Young à chaque fonction coordonnées de f . □

☞ On obtient les développements limités des fonctions à valeurs vectorielles en calculant les développements limités coordonnée par coordonnée.

Exercice 1.24.

Déterminer le développement limité de la fonction

$$f : t \in]-\pi; \pi[\mapsto (\cos(t), \sin(t)).$$

7.5 Interprétation cinématique

Lorsque l'on étudie le déplacement d'un mobile dans le plan, sa position en fonction du temps est donnée par une fonction $M : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui sera dite à **valeurs ponctuelles**.

Les fonctions coordonnées x et y de M donnent, à l'instant t , les coordonnées du point $M(t)$ où se trouve le mobile.

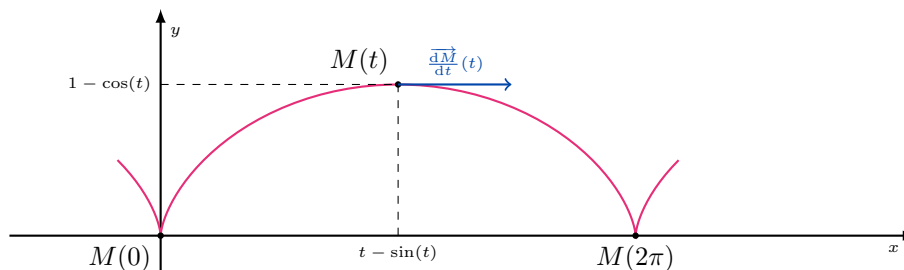
Le vecteur $M'(t) = (x'(t), y'(t))$ est alors appelé *vecteur vitesse* du mobile à l'instant t ; il s'agit d'une fonction à *valeurs vectorielles*.

On notera parfois $\frac{d\vec{M}}{dt}(t)$ la dérivée de M à l'instant t . Le graphe (ou **courbe**) de M représente alors la *trajectoire* du mobile.

La figure ci-dessous représente la trajectoire d'un mobile donnée par la fonction

$$M : t \mapsto (t - \sin(t), 1 - \cos(t)).$$

Le vecteur vitesse est donné, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ par : $\frac{d\vec{M}}{dt}(t) = (1 - \cos(t), \sin(t))$.



8 Autres Exercices

8.1 Continuité, dérivabilité

Exercice 1.25.

Une fonction continue nulle part

On introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. En considérant la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ définie par $a_n = \sqrt{2}/n$ et à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que f n'est pas continue en 0.
2. Adapter le raisonnement pour montrer que f n'est continue en aucun point rationnel.
3. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
 - a. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$, définie par $x_n = \lfloor nx \rfloor / n$, a pour limite x et que tous les termes sont rationnels.
 - b. En déduire que f n'est pas continue en x .

Exercice 1.26.

Équation fonctionnelle

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)^2 = 1$. Montrer que f est constante.

Exercice 1.27.

Équation fonctionnelle

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0 et vérifiant:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right).$$

Après avoir montré que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(x/2^n)$, montrer que f est constante.

Exercice 1.28.

Oral Math II 2023

Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \leq 1$.

Pour $k \in \mathbb{R}$, on note S_k l'ensemble des réels α tels que $f(\alpha) = k\alpha$.

1. Montrer que pour $k > 1$, S_k ne contient qu'un seul élément.
2. À l'aide de fonctions affines, montrer que S_1 peut être vide, ou un singleton, ou $\mathbb{R}$ tout entier.
3. Montrer que si S_1 contient deux éléments a et b tels que $a < b$, alors S_1 contient $[a, b]$.

Exercice 1.29.

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de la dérivée n -ième de

1. g où $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$
2. f où $f(x) = x^2 \sin(x)$.

Exercice 1.30.

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, |e^x - x - 1| \leq \frac{x^2}{2} e^{|x|}$.

8.2 Fonctions trigonométriques et réciproques

Exercice 1.31.

Étudier et tracer les courbes de $x \mapsto \arccos(\cos x)$ et de $x \mapsto \arctan(\tan x)$.

Exercice 1.32.

Résoudre l'équation $\arccos(x) + \arcsin(x^2 - x + 1) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 1.33.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Calculer la dérivée de f , puis en déduire une expression simplifiée de f .
3. Retrouver le résultat précédent en effectuant un changement de variable.

Exercice 1.34.

1. Soient a, b positifs ou nuls. Vérifier $\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right)$.
2. En déduire la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=0}^n \arctan\left(\frac{1}{1+k(k+1)}\right)$.

Exercice 1.35.

Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{sh} x}$ si $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ en 0.

8.3 Études locales, DL, DAS

Exercice 1.36.

Effectuer l'étude locale des fonctions suivantes au voisinage de 0:

$$a : x \mapsto \ln\left(\frac{\arctan x}{x}\right) \quad b : x \mapsto \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^x \quad c : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}.$$

Exercice 1.37.

Déterminer un développement asymptotique en $+\infty$ de $\ln(x^3 + x + 1)$ à la précision $\frac{1}{x^2}$.

Exercice 1.38.

Soit $f :]-1, +\infty[\rightarrow]-\frac{1}{e}, +\infty[$, $x \mapsto xe^x$.

1. Montrer que f est bijective, et que f et f^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leurs ensembles de définition.
2. Déterminer un DL₃ en 0 de f^{-1} et un équivalent de f^{-1} en $+\infty$.

Exercice 1.39.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on appelle f_n la fonction définie par $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}$.

Montrer que f_n se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Extrait Oral Math II 2022

8.4 Études de fonctions

Exercice 1.40.

Oral Math II 2018

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}$.

1. Montrer que pour tout entier n , il existe un polynôme P_n tel que $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2}$.
2. Donner le degré, le coefficient dominant et la parité de P_n .
3. En utilisant la relation $f'(x) + 2xf(x) = 0$, déterminer une relation entre P_{n-1}, P_n, P_{n+1} .
4. En déduire $P'_n = -2nP_{n-1}$, puis une équation différentielle vérifiée par P_n .
5. En déduire les coefficients de P_n .

Exercice 1.41.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique de classe $\mathcal{C}^1$. On note Γ sa courbe représentative dans $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que f admet un minimum et un maximum.
2. Soient α, β tels que $f(\alpha) = \min_{\mathbb{R}} f$ et $f(\beta) = \max_{\mathbb{R}} f$. Calculer $f'(\alpha)$ et $f'(\beta)$.
3. Donner l'équation de la tangente T_t à Γ au point de coordonnées $(t, f(t))$.
4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que T_t coupe Γ au point de coordonnées $(t+a, f(t+a))$. On pourra utiliser la fonction définie par $g(x) = af'(x) - f(x+a) + f(x)$.

Exercice 1.42.

Extrait DS n°2, Automne 2024

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
c. Acheter l'étude des variations de f , dresser son tableau de variations incluant ses limites (justifiées) aux infinis.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

- a. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]0; 1[$.
- b. Soit g la fonction définie sur $[0; 1]$ par $g(x) = f(x) - x$. Calculer, pour $x \in]0; 1]$, $g''(x)$. Montrer que g réalise une bijection de $[0; 1]$ sur un ensemble que l'on déterminera.

On admettra que $f'\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) < 1$.

- c. En déduire que la suite (u_n) est strictement décroissante et qu'elle converge. Déterminer sa limite.
3. a. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
b. Montrer par récurrence qu'il existe une suite de polynômes (P_n) , telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} f(x).$$

On précisera les expressions de P_1 et P_2 ainsi que la relation de récurrence entre P_{n+1} et P_n .

- c. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(0) = 2^n$.
- d. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = 0$.
- e. Conclure que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

4. Écrire le développement limité de f en 0 à l'ordre n , pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque. Que remarque-t-on ?

Exercice 1.43.

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 - 4x + 6}{x - 1}$.

Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet deux asymptotes, et que l'intersection de celles-ci est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

8.5 Suites implicites

Exercice 1.44.

Une suite implicite

On considère, pour $n \geq 3$, l'équation

$$(E_n) \quad x^n + x^2 + 2x - 1 = 0.$$

1. On introduit la fonction $f_n : x \mapsto x^n + x^2 + 2x - 1$. Montrer que f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ dans un intervalle J à déterminer. Quelles sont les variations de f^{-1} ?
2. Montrer alors que (E_n) possède une unique solution strictement positive, que l'on notera x_n . Montrer de plus que, pour tout $n \geq 3$,

$$0 < x_n < \frac{1}{2}.$$

3. Montrer que $(x_n)_{n \geq 3}$ est croissante.
4. En conclure que $(x_n)_{n \geq 3}$ converge vers un réel ℓ dont on donnera un encadrement.
5. En utilisant un encadrement de x_n , montrer que x_n^n tend vers 0, si n tend vers $+\infty$.
6. Conclure quant à la valeur de ℓ .

Exercice 1.45.

Suite implicite, Oral Math II 2023

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, n > 1$, on définit une fonction $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n - x - n$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel $u_n > 1$ tel que $f_n(u_n) = 0$.
2. Soit $a > 1$. Montrer que pour tout entier n assez grand on a $f_n(a) > 0$. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite α .
3. On pose $u_n = \alpha + \varepsilon_n$. Déterminer un équivalent de $u_n - \alpha$.

8.6 Fonctions à valeurs vectorielles

Exercice 1.46.

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $f : t \mapsto \left(\frac{t^2}{t^2 + 1}, \frac{t^3}{t^2 + 1} \right)$.

Exercice 1.47.

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $f : t \mapsto (\cos^3(t), \sin^3(t))$.

Exercice 1.48.

Mouvement sur une sphère et accélération

On considère $\mathbb{R}^3$, muni de sa structure euclidienne canonique. Soient $R > 0$ et $\mathcal{S}_R$ la sphère de centre 0 et de rayon R . Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ deux fois dérivable. On suppose que: $\forall t \in I, f(t) \in \mathcal{S}_R$. Montrer que : $\forall t \in I, f'(t) \perp f(t)$ et $\forall t \in I, \langle f''(t), f(t) \rangle \leq 0$.

Exercice 1.49.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable ne s'annulant pas et telle que les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ sont colinéaires pour tout $t \in I$.

En considérant $g : t \mapsto \frac{f(t)}{\|f(t)\|}$, montrer que la fonction f prend toutes ses valeurs dans une même droite vectorielle.

Exercice 1.50.

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction dérivable. Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c)$ soit colinéaire à $f(b) - f(a)$. On pourra introduire la fonction auxiliaire $\psi : t \mapsto \det(f(t) - f(a), f(b) - f(a))$.