



5

Des séries et des hommes

Ce chapitre propose des rappels et compléments sur les séries numériques ainsi qu'une application : la définition de l'exponentielle complexe.

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Définitions

Définition 5.1.

Série numérique

✗ On appelle **série numérique** ou **série** toute suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^n u_k,$$

où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. On note alors cette série $\sum u_n$ ou $\sum_{n \geq 0} u_n$.

✗ u_n est appelé le **terme général** de la série ;

✗ pour tout entier n , S_n est la **somme partielle** d'ordre n de la série ;

✗ une série $\sum u_n$ est dite à termes positifs si son terme général est à valeurs réelles et si, pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 0$.

☞ On rencontrera plus tard la notion de série entière qui désigne une série de *fonctions* et non plus de *nombres* d'où la précision avec le qualificatif *numérique* pour les séries étudiées dans ce chapitre.

Remarque 5.1.

Définition APCR

Étant donnée une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ définie à partir d'un certain rang n_0 (APCR), on définit de même une série notée

$$\sum_{n \geq n_0} u_n, \text{ dont les sommes partielles sont définies par } S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k \text{ pour tout } n \geq n_0.$$

Avec Python.



Si l'on dispose d'un programme `liste_u(n)` qui renvoie la **liste** des termes consécutifs (jusqu'au rang n) de la suite (u_n) , on peut obtenir :

- ✗ la somme partielle d'indice n avec la commande `np.sum(liste_u(n))` ;
- ✗ la liste des termes consécutifs de la suite des sommes partielles grâce à la commande `np.cumsum(liste_u(n))`.

Autrement, on peut aussi utiliser une boucle `for` pour calculer S_n :

```
s= liste_u[0]
for k in range(1,n+1) :
    s=s+liste_u[k]
```

Définition 5.2.**Série convergente**

✗ Une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est dite **convergente** si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est convergente.

Auquel cas, la limite de la suite des sommes partielles est appelée **somme de la série** et est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

En d'autres termes on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n.$$

✗ Dans le cas où la suite des sommes partielles diverge, on dit que la série est **divergente**.

✗ Une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est dite **absolument convergente** si la série $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ est convergente.

✗ Si une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, on appelle **reste à l'ordre N** de $\sum_{n \geq 0} u_n$, et on note R_N , le réel défini par

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^N u_n.$$

Remarque 5.2.**Attention, danger !**

✗ L'expression $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ n'a un sens **que si** la série de terme général u_n **converge**, et désigne alors sa limite. On se gardera donc de l'écrire dans le cas où la suite diverge, et **on ne l'écrira qu'après avoir démontré la convergence**.

✗ L'expression $\sum_{n \geq 0} u_n$ désigne simplement la série de terme général u_n , et est donc toujours valable.

✗ La formule $\sum_{n \geq 0} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ n'a donc **aucun sens**, puisque le premier membre est une série, alors que le second est un nombre (si tant est qu'il existe!).

✗ Lorsque l'on parlera de la *nature d'une série*, on se référera à son caractère absolument convergent, convergent ou divergent.

Remarque 5.3.**Nature et premier terme sommé**

Soit n_0 un entier **fixé**. Remarquant qu'on peut décomposer (par la relation de Chasles) une somme partielle

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^n u_k,$$

il est clair que la nature de la série ne dépend pas de la somme des n_0 premiers termes, celle-ci étant constante. La valeur du premier terme de la série ne modifie donc pas le caractère convergent ou divergent mais en revanche, cela modifie, en cas de convergence, la valeur de la somme.

Définition 5.3.**Cas des séries de termes complexes**

Dans le cas où $\sum u_n$ est une série à termes complexes, celle-ci converge si et seulement si les deux séries $\sum \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(u_n)$ convergent, et lorsque c'est le cas on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(u_n).$$

2 Premiers résultats

2.1 Propriétés algébriques des séries convergentes

Le théorème suivant montre que l'ensemble des séries convergentes est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Théorème 5.1.

Structure d'espace vectoriel

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries convergentes, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

Alors, la série $\sum_{n \geq 0} (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Remarque 5.4.

Attention, encore...

Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ ou $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge, l'égalité de la proposition précédente n'a aucun sens! Par exemple, bien que l'on ait

$$\forall n \geq 1, \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

écrire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$ n'aurait aucun sens puisque les séries de droite divergent (voir le critère de Riemann énoncé ci-après).

2.2 Critères élémentaires de convergence ou divergence

Proposition 5.2.

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série telle qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant, pour tout $n \geq n_0$, $u_n = 0$ (la suite (u_n) est donc nulle APCR).

Alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, et l'on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n$.

Le résultat suivant donne une condition **nécessaire** (mais pas suffisante!) de convergence.

Proposition 5.3.

Une condition nécessaire

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série convergente. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Définition 5.4.

Divergence grossière

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est divergente et on dit qu'elle diverge grossièrement.

Exercice 5.1.

Soit H_n la somme partielle d'indice n de la *série harmonique* $\sum \frac{1}{k}$.

1. Que vérifie le terme général de cette série?
2. Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}.$$

3. En déduire la divergence de la série harmonique.

Remarque 5.5.

L'exercice précédent propose alors un contre-exemple de série qui diverge bien que son terme général tende vers 0.

On prendra donc bien garde de ne **jamais** écrire que la convergence vers 0 du terme général implique celle de la série.

C'est nécessaire, mais il faut en fait savoir si on tend vers 0 *assez vite* de sorte que la quantité sommée est *assez petite*. Comme on le verra ci-après, la recherche d'un équivalent ou d'une relation de négligeabilité (pour une série à termes positifs) permet de déterminer la nature de celle-ci : c'est une information plus précise que la simple limite.

Une erreur à ne pas commettre

Les outils d'étude des suites s'appliquent aussi aux séries (ce sont des suites de sommes partielles...). Notamment, le théorème de convergence monotone implique le résultat suivant.

Proposition 5.4.

Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Exercice 5.2.

On considère la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$, dont on note S_n la somme partielle d'indice n .

1. Montrer que la suite (S_n) est croissante.
2. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.
3. En déduire que la série est convergente. On note S sa somme.
4. Déduire également de la Question 2., que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \geq n$, on a

$$\sum_{k=n+1}^p \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{p}.$$

En déduire une majoration du reste.

5. Écrire un programme en **Python** permettant d'obtenir une valeur approchée à 10^{-3} de S .

2.3 Séries télescopiques**Proposition 5.5.****Convergence des séries télescopiques**

Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. La série $\sum_{n \geq 0} (a_{n+1} - a_n)$ converge si et seulement si la suite (a_n) converge, et dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_{n+1} - a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - a_0.$$

Exercice 5.3.

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ est divergente mais pas grossièrement divergente.

Exercice 5.4.

Soient f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f : x \mapsto x - x^2$ et (u_n) , de premier terme $u_0 \in]0; 1[$, vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = u_n - u_n^2.$$

1. Dresser le tableau de variations de f .
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0; 1[$.
3. Étudier la monotonie puis la convergence de (u_n) . Déterminer sa limite.
4. Montrer que la série $\sum u_n^2$ converge et préciser sa somme.

2.4 Série géométrique

Proposition 5.6.

Série géométrique

Soit $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum_{n \geq 0} z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$.

Dans ce cas, il y a convergence absolue, et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Si $|z| \geq 1$, cette série diverge grossièrement.

Remarque 5.6.

Développement limité et sommes partielles

Le résultat précédent permet de retrouver le développement limité de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

Attention, on ne peut pas généraliser ce genre de résultat (ne serait-ce que parce que les développements limités sont des formules locales).

Certaines fonctions ont la propriété d'être *développables* en série (entière), ce qui sera proprement introduit et détaillé dans le **Chapitre 9**.

2.5 Comparaison à l'intégrale et séries de Riemann

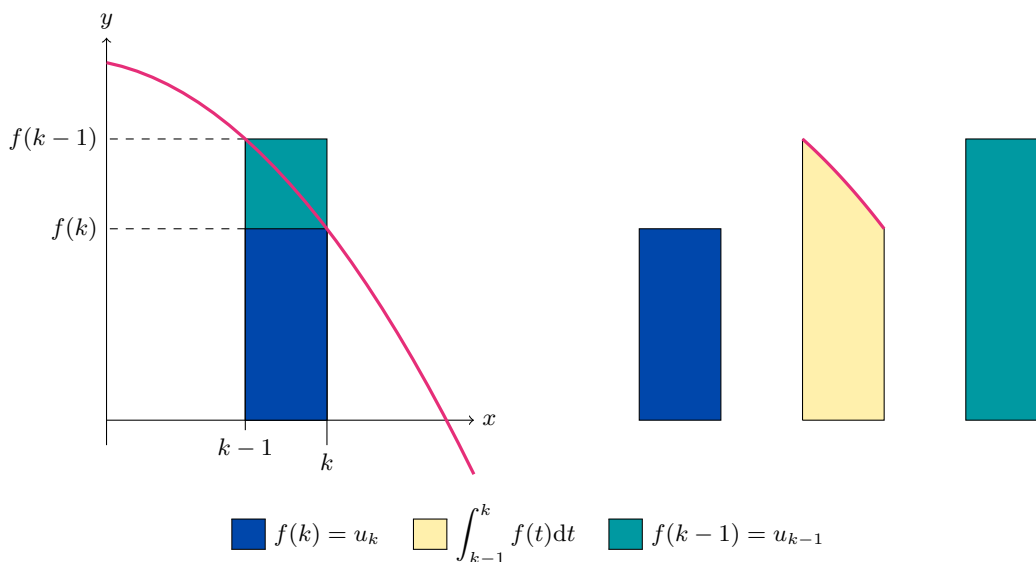
Pour déterminer la nature d'une série à termes positifs, on peut comparer ses sommes partielles à une intégrale, via le lemme suivant. La démonstration de ce résultat est un raisonnement classique à savoir refaire.

Proposition 5.7.

Comparaison série / intégrale

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante. Alors :

- i. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n)$;
- ii. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n+1} f(k) \leq \int_0^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=0}^n f(k)$.



Définition 5.5.

Série de Riemann

On appelle **série de Riemann** la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Théorème 5.8.**Critère de Riemann**

La série de Riemann de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 5.5.**Une série de Bertrand**

Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n \ln n}$ diverge et donner un équivalent de $\sum_{n=2}^N \frac{1}{n \ln n}$.

Remarque 5.7.

- ✗ La comparaison à l'intégrale est fréquemment utilisée pour déterminer un équivalent de la somme partielle d'une série divergente (ou du reste d'une série convergente).
- ✗ Cette méthode peut également s'appliquer à des fonctions croissantes.
- ✗ La comparaison série/intégrale ne permet pas (le plus souvent) de calculer la somme d'une série convergente.

2.6 Séries alternées**Théorème 5.9.****Critère spécial des séries alternées**

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante à termes positifs, qui converge vers 0. On note, pour $N \in \mathbb{N}$, la somme partielle

$$S_N = \sum_{n=0}^N (-1)^n u_n.$$

On a les résultats suivants.

- i. La série $\sum (-1)^n u_n$ converge.
- ii. Pour tout entier N on a $S_{2N+1} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n \leq S_{2N}$.
- iii. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k$ de la série a le même signe que son premier terme et est majoré par celui-ci en valeur absolue :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq |R_n| = (-1)^n R_n \leq u_n.$$

Exercice 5.6.

1. Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

Déterminer un entier n_0 tel que S_{n_0} soit une valeur approchée de la somme de la série à 10^{-3} près.

3 Théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs

S'il est en général difficile de calculer la somme d'une série, on dispose de critères de convergence qui permettent de déterminer la nature d'une série, en la comparant à une série de nature connue.

Théorème 5.10.**Critère de comparaison**

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs telles que $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang. Alors,

- i. Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, et on a dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
- ii. Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge.

Remarque 5.8.

Si on étudie une série dont le terme général u_n est négatif, on peut encore utiliser ce résultat quitte à considérer $-u_n$. Le seul cas où on ne peut pas utiliser ce théorème est le cas où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas de signe constant.

Comparaison des séries à termes négatifs**Exercice 5.7.**

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge, à l'aide du théorème de comparaison.
2. Calculer la somme de cette série.

Exercice 5.8.

Montrer que la série de terme général $\frac{\ln n}{n^2}$ converge.

Théorème 5.11.

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries de **signe constant**.

Si, lorsque $n \rightarrow +\infty$, $u_n \sim v_n$ alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont de même nature.

Critère d'équivalence**Remarque 5.9.**

Attention, ce théorème ne s'applique pas aux séries à termes réels de signe variable, ni à celles de termes complexes non réels.

On s'en convaincra en regardant l'**Exercice 5.??**.

Exercice 5.9.

Déterminer la nature de la série de terme général $\ln \left(1 + \frac{1}{2^n} \right)$.

Exercice 5.10.

1. Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.
2. Montrer que :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + op\left(\frac{1}{n}\right).$$

3. En déduire que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ diverge. Commenter.

Une erreur classique**4 Étude de la convergence absolue****4.1 Théorème fondamental et théorème de comparaison**

Pour déterminer la nature d'une série, on se contentera le plus souvent de déterminer si elle est absolument convergente, et on sera ainsi ramené à l'étude d'une série à termes positifs. Le théorème suivant permettra d'en déduire la convergence de la série.

Théorème 5.12.

Toute série absolument convergente est convergente.

Remarque 5.10.

La réciproque du résultat ci-dessus est inexacte. Par exemple la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ converge (elle est alternée), alors que celle de terme général $\frac{1}{n}$ diverge.

Exemple 5.1.

La série de terme général $u_n = \frac{\sin(n)}{n^2}$ est absolument convergente, et donc convergente.

Le théorème suivant montre que l'ensemble des séries absolument convergentes est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des séries convergentes.

Proposition 5.13.

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries absolument convergentes et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors la série $\sum_{n \geq 0} (\lambda u_n + \mu v_n)$ est absolument convergente.

Les différents théorèmes de comparaison s'adaptent à la notion de série absolument convergente.

Théorème 5.14.**Critères de comparaison**

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries.

- i. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou au moins APCR), $|u_n| \leq |v_n|$ et si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge absolument, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument.
- ii. Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$ (ou $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$) et si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge absolument, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument.
- iii. Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors la convergence absolue de $\sum_{n \geq 0} v_n$ équivaut à celle de $\sum_{n \geq 0} u_n$.

Exercice 5.11.

Étudier la nature de la série de terme général $(-1)^n n e^{-n}$.

Proposition 5.15.**Inégalité triangulaire généralisée**

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$, $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries et $M \geq 0$.

- i. Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente, alors : $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.
- ii. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leq M$, et si $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente, alors $\sum_{n \geq 0} v_n u_n$ est absolument convergente,

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |v_n u_n| \leq M \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Autrement dit, le produit des termes généraux d'une suite bornée et du terme général d'une série absolument convergente est encore le terme général d'une suite absolument convergente.

4.2 Règle de d'Alembert

Le théorème suivant est fréquemment utile. On en réutilisera une version dans le cadre des séries entières. Il est indispensable de le connaître parfaitement.

Théorème 5.16.**Règle de d'Alembert**

Soient $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes non nuls à partir d'un certain rang telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \ell.$$

- i. Si $\ell < 1$ alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument.
- ii. Si $\ell > 1$ alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge grossièrement.

Remarque 5.11.

Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure. En effet, si $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, et pourtant $\sum u_n$ est tantôt divergente, tantôt convergente suivant la valeur de α .

Il existe un résultat, nommé critère de **Raabe-Duhamel** (voir [Exercice 5.??](#)), qui fait intervenir le deuxième terme du développement asymptotique de u_{n+1}/u_n , mais il n'est pas au programme en **PT**.

On pourra aussi regarder l'[Exercice 5.??](#), qui propose un critère dans un des cas limite de la règle de d'Alembert.

Exercice 5.12.

Étudier la nature de la série de terme général $n^2 z^n$ où $z \in \mathbb{C}$.

4.3 Produit de Cauchy**Définition 5.6.****Produit de Cauchy**

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n, \sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries. On appelle **produit de Cauchy** de $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ où

$$w_n = \sum_{k+i=n} u_k v_i = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}.$$

Théorème 5.17.**Produit de Cauchy de deux séries abs. convergentes**

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n, \sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries absolument convergentes.

Alors leur produit de Cauchy $\sum_{n \geq 0} w_n$ converge absolument, et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

5 Application : l'exponentielle complexe

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. En PTSI, on a défini l'exponentielle complexe de z en posant $e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$. On peut maintenant donner une autre expression de l'exponentielle complexe.

Théorème 5.18.**Série exponentielle**

- i. Soit $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ converge absolument.
- ii. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$.

Preuve. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n en 0 donne :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| = \left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{e^0}{k!} (x-0)^k \right| \leq \frac{|x-0|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{t \in [0, x]} e^t \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

puisque $|x|^n = o(n!)$ pour tout réel x .

Soit maintenant $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ est alors absolument convergente (donc convergente). On note $S(z)$ sa somme.

Si $z \in \mathbb{R}$, on a alors $S(z) = e^z$ par unicité de la limite. Si $z = iy \in i\mathbb{R}$, alors

$$\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(iy)^k}{k!} = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^j y^{2j}}{(2j)!} + i \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \frac{(-1)^j y^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

Toujours par Taylor-Lagrange (à l'ordre n) appliqué aux fonctions cos et sin de classe $\mathcal{C}^\infty$, on a (en majorant $|\sin|$ et $|\cos|$ par 1)

$$\left| \cos(y) - \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^j y^{2j}}{(2j)!} \right| \leq \frac{|y-0|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et

$$\left| \sin(y) - \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \frac{(-1)^j y^{2j+1}}{(2j+1)!} \right| \leq \frac{|y-0|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, en identifiant parties réelles et imaginaires, on a bien

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(iy)^k}{k!} = \cos(y) + i \sin(y) = e^{iy}.$$

Enfin, si $z = x + iy$, alors, les séries $\sum \frac{x^k}{k!}$ et $\sum \frac{(iy)^k}{k!}$ étant toutes deux absolument convergentes, leur produit de Cauchy l'est aussi. Or, le terme général de ce produit de Cauchy vaut

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \frac{(iy)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (iy)^{n-k} = \frac{(x + iy)^n}{n!} = \frac{z^n}{n!},$$

par la formule du binôme. Ainsi,

$$S(z) = e^x e^{iy} = e^{x+iy} = e^z.$$

□

6 Sélection d'exercices

Exercice 5.13.

Étudier la convergence et calculer la somme de la série de terme général u_n dans les cas suivants:

$$i. u_n = \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} \quad ii. u_n = \ln \left(\frac{\ln^2(n+1)}{\ln(n) \ln(n+2)} \right) \quad iii. u_n = \frac{5}{(n+1)!}.$$

Exercice 5.14.

Déterminer la nature de chacune des séries

$$\begin{aligned} i. \sum_{k \geq 2} \ln \left(1 + \frac{1}{k\sqrt{k}} \right), \quad ii. \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^2 \ln(k)}, \quad iii. \sum_{k \geq 0} \left(\exp \left(\frac{k^2+1}{k^4+1} \right) - 1 \right). \\ iv. \sum_{k \geq 1} \left((k+1)^{1/4} - (k-1)^{1/4} \right), \quad v. \sum_{k \geq 1} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{k^2} \right)^k \right). \\ vi. \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + \sqrt{n}}, \quad vii. \sum_{n \geq 1} n \ln \left(\frac{1 + \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \right), \quad viii. \sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^{3/2}}, \quad ix. \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} \end{aligned}$$

Exercice 5.15.

Étudier la nature des séries de terme général u_n dans chacun des cas suivants :

$$\begin{array}{llll}
 i. u_n = \ln\left(\frac{1}{n}\right) & ii. u_n = e^{-n^2} & iii. u_n = e^{-\sqrt{n}} & iv. u_n = 2^n \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) \\
 v. u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n & vi. u_n = \frac{1}{n} \left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}\right) & vii. u_n = \frac{(n!)^3}{(4n)!} & viii. u_n = \frac{(-1)^n}{(\ln(n))^n} \\
 ix. u_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n \cdot 5^n} & x. u_n = \int_0^{1/n} \frac{\sin t}{1 + \sqrt{t}} dt & xi. u_n = \frac{2^n}{n^2} (\sin \beta)^{2n} & xii. u_n = \frac{\alpha^n}{1 + \alpha^{2n}}
 \end{array}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 5.16.

Montrer que la série $\sum (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ converge. Est-elle absolument convergente ?

Exercice 5.17.

Oral Math II 2021

Soit $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles la série $\sum u_n$ converge.
2. Pour ces valeurs, trouver sa somme et un équivalent simple du reste d'ordre N .

Exercice 5.18.

On cherche l'ensemble des couples $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que la série $\sum \frac{a^k}{1 + b^k}$ soit convergente.

1. Montrer que si $0 < a < b$, alors la série est convergente.
2. On considère $0 < b \leq a$.
 - a. Traiter les cas $b < 1$ et $b = 1$.
 - b. Que se passe-t-il pour $b > 1$?

Exercice 5.19.

Oral Mines-Télécom 2024

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+, f''(x) < 0$ et $f'(x) \geq 0$.

1. Montrer que la suite $(f'(n))_{n \geq 1}$ converge.
2. Montrer que : $\forall x \geq 1, f(x+1) - f(x) \leq f'(x) \leq f(x) - f(x-1)$.
3. Montrer que la série $\sum f'(n)$ converge si et seulement si la suite $(f(n))_{n \geq 1}$ est majorée.

Exercice 5.20.

1. À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, donner un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^n \ln^2 k$.
2. En déduire la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{S_n}$.

Exercice 5.21.

On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$.

1. Montrer que (u_n) converge et donner sa limite.
2. Donner la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum \left(u_n - \frac{1}{n}\right)$.

Exercice 5.22.

Séries de Bertrand

Soient $\alpha, \beta > 0$. Montrer que

$$\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} \text{ converge } \iff \alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1).$$

Exercice 5.23.

Oral Math II 2024

1. Montrer que la série $\sum \frac{1}{k^2-1}$ converge.
2. Décomposer en éléments simple $\frac{1}{k^2-1}$.
3. En déduire la valeur de la somme $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2-1}$.
4. Convergence et somme de la série $\sum \frac{[(\sqrt{k+1})] - [(\sqrt{k})]}{k}$.

Exercice 5.24.

Oral Math II 2025

Soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \prod_{k=0}^n u_k$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (u_n - 1)u_n + 1$ et $\frac{u_n - 1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$.
2. Montrer la convergence de la série $\sum \frac{1}{u_n}$ et calculer sa somme.
3. Montrer la convergence de la suite de terme général $v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$ et calculer sa limite.

Exercice 5.25.

Série de fonctions, Oral Math II 2024

1. Étudier la convergence de la série $\sum \frac{1}{1 + (nx)^2}$, où $x \in \mathbb{R}^*$.
2. On pose $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1 + (nx)^2}$, $x \in \mathbb{R}^*$.
 - a. Montrer que h est paire puis étudier ses variations.
 - b. Déterminer la limite de h en $+\infty$.
 - c. Par une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent de $h(x)$ lorsque $x \rightarrow 0^+$.

Exercice 5.26.

Règle de Raabe-Duhamel

Soit (u_n) une suite à termes positifs telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. On suppose $a > 1$. Soit $b \in]1, a[$ et posons $v_n = \frac{1}{n^b}$.

Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

En déduire que $\sum u_n$ converge si $a > 1$.

2. Démontrer que $\sum u_n$ diverge si $a < 1$.
3. En utilisant les *séries de Bertrand*, montrer que le cas $a = 1$ est douteux.

Exercice 5.27.

Un cas limite

1. Soit f la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par $f(t) = \ln(1+t) - t$. Expliciter le développement limité à l'ordre 2 en 0 de f . En déduire la nature de la série $\sum f(1/n)$.

On considère un nombre réel $a > 0$ et une suite à termes strictement positifs $(u_n)_{n \geq 1}$. On introduit alors les suites (w_n) et (ℓ_n) définies, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$w_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \frac{a}{n}, \quad \ell_n = \ln(n^a u_n).$$

On **suppose** que la série de terme général w_n est absolument convergente.

2. Montrer la convergence des séries $\sum_{n \geq 1} w_n^2$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{w_n}{n}$.

3. Vérifier que

$$\ell_{n+1} - \ell_n = f\left(w_n - \frac{a}{n}\right) + w_n + af\left(\frac{1}{n}\right).$$

4. Préciser

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n - \frac{a}{n}.$$

puis la nature de la série $\sum_{n \geq 1} f\left(w_n - \frac{a}{n}\right)$.

5. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} (\ell_{n+1} - \ell_n)$.

6. Que peut-on en déduire à propos de la suite (ℓ_n) ?

7. Conclure qu'il existe une constante $A > 0$ telle que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A}{n^a}.$$

8. **Application.** On considère la suite (u_n) définie, pour $n \geq 1$ par

$$u_n = \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}.$$

- a. Expliciter u_1, u_2, u_3 .

- b. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 5.28.

Constante d'Euler

Soient $m \in \mathbb{N}$ un entier et $f : [m, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue et décroissante.

1. a. Montrer que la série $\sum_{n > m} \left(\int_{n-1}^n f(t) dt - f(n) \right)$ converge.

- b. En déduire l'existence d'une constante κ telle que $\sum_{j=m}^n f(j) = \int_m^n f(t) dt + \kappa + o(1)$.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad J_n = \sum_{k=2}^n \frac{\ln(k)}{k} \quad \text{et} \quad K_n = \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k \ln(k)}{k}$$

2. Montrer qu'il existe une constante γ appelée *constante d'Euler* telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (H_n - \ln(n)) = \gamma$.

3. Déterminer la nature de $(J_n)_{n \geq 2}$ et $(K_n)_{n \geq 2}$.

4. a. Montrer que, pour tout $n \geq 2$,

$$K_{2n} = \ln(2)H_n + J_n - J_{2n}.$$

- b. Exprimer la valeur de $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k}$ en fonction de γ .

5. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 5.29.**Critère d'Abel**

Soient (a_n) et (b_n) deux suites. On note $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$ et $S_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k$.

1. Montrer, en remarquant que, pour $k \geq 2$, on a $B_k - B_{k-1} = b_k$, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$S_n = a_{n+1} B_n - \sum_{k=1}^n B_k (a_{k+1} - a_k).$$

2. Démontrer alors le résultat suivant :

Théorème.**Critère d'Abel (1802-1829)**

Si la suite (a_n) tend vers 0, si la suite (B_n) est bornée et si la série $\sum (a_k - a_{k+1})$ converge absolument, alors la série $\sum a_k b_k$ converge.

On considère la série $\sum (-1)^n \sqrt{n} \ln \left(\frac{n+2}{n} \right)$.

3. Montrer que

$$a_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \sqrt{n} \ln \left(\frac{n+2}{n} \right) \sim \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad n \rightarrow +\infty$$

4. En déduire que la série n'est pas absolument convergente.

5. En écrivant $\sqrt{n+1} = \sqrt{n} \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$, montrer que

$$a_n - a_{n+1} \sim \frac{1}{n\sqrt{n}}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

6. Conclure que le critère d'Abel s'applique et que la série est bien convergente.

Exercice 5.30.**Un calcul de $\zeta(2)$ - Extrait Devoir Surveillé N°4, Automne 2024**

On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t \, dt, \quad J_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n} t \, dt \quad \text{et} \quad Q_n = \frac{J_n}{I_n}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(2n+2)I_{n+1} = (2n+1)I_n \quad \text{puis} \quad I_n = n((2n-1)J_{n-1} - 2nJ_n).$$

2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Q_{n-1} - Q_n = \frac{1}{2n^2}$.

3. Obtenir que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad x \leq \frac{\pi}{2} \sin x.$$

4. Montrer alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad J_n \leq \frac{\pi^2}{4} (I_n - I_{n+1}) = \frac{\pi^2}{4} \frac{I_n}{2n+2}$$

5. Déterminer la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$