Math PT. 2026 - 2027

Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

7 Intégration généralisée

Ce chapitre propose, dans une première partie des rappels sur le cours d'intégration de première année, puis étend ensuite la notion d'intégrale à des intervalles non bornés et/ou non fermés.

1 Rappels : intégrale d'une fonction continue sur un segment

1.1 Définition et propriétés

On peut montrer que tout fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ peut s'écrire comme limite d'une fonction en escalier. Étant immédiat le calcul de l'aire sous la courbe d'une fonction en escalier, on peut alors définir l'intégrale de f sur $[a, b]$ comme une limite.
En utilisant une subdivision régulière (à pas constant) de $[a, b]$, on obtient le résultat suivant.

Définition 7.1. **Somme de Riemann à l'ordre n**

Soient f une fonction continue sur $[a, b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

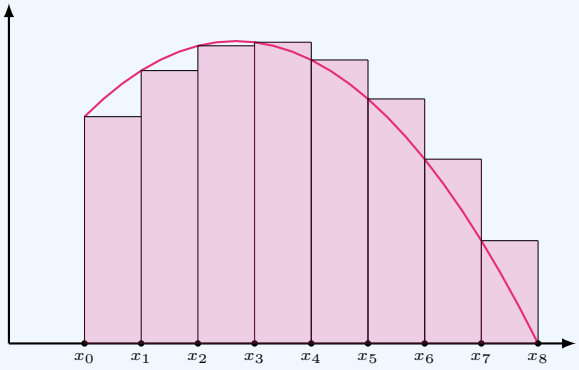
On définit la subdivision $(x_0, ..., x_n)$ régulière de $[a, b]$ (de pas $(b-a)/n$) par :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ x_k = a + k\frac{b-a}{n}.$$

Puis, la **somme de Riemann à l'ordre** n de f est alors définie par

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k).$$

Celle-ci correspond à l'aire algébrique des n rectangles de largeur $(b-a)/n$ et de hauteurs respectives $f(x_0)$, ... $f(x_{n-1})$.



Avec $n = 8$

Théorème & Définition 7.0. **Sommes de Riemann à pas constant**

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. En reprenant les notations de la **Définition 7.1.** ci-dessus, la suite des sommes de Riemann $(R_n(f))_{n\geq 1}$ est convergente et on appelle intégrale de f sur $[a, b]$ sa limite. On note :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) =: \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

☞ Le réel $\mathcal{A} = \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ mesure, en unités d'aire, l'aire algébrique du domaine délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Il découle de cette définition de l'intégrale les propriétés suivantes.

Proposition 7.1. **Propriétés de l'intégrale**

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On a les résultats suivants.

i. **Antisymétrie.** $\displaystyle\int_b^a f(t)\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$

ii. **Relation de Chasles.** Pour tout $c \in [a,b]$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t.$

iii. **Linéarité.** Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$

iv. **Positivité.** On a : $\displaystyle[\forall t \in [a,b],\ f(t) \geq 0] \Longrightarrow \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geq 0.$

De plus :

$$\left.\begin{array}{l} \forall t \in [a,b],\ f(t) \geq 0 \\ \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow [\forall t \in [a,b],\ f(t) = 0]\,.$$

v. **Croissance.** On a : $\displaystyle[\forall t \in [a,b],\ f(t) \leq g(t)] \Longrightarrow \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$

vi. **Inégalité triangulaire.** On a : $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t.$

Remarque 7.1.

Les propriétés *iv.*, *v.* et *vi.* deviennent fausses si jamais $a > b$. Auquel cas, on utilise la propriété *i.* pour obtenir des inégalités dans l'autre sens.

Les propriétés ci-dessous permettent de démontrer le résultat ci-dessous, fondamental comme son nom l'indique.

Théorème 7.2. **Théorème fondamental de l'analyse**

Soient f une fonction continue sur $[a,b]$ et $c \in [a,b]$. Alors, la fonction F définie sur $[a,b]$ par

$$F(x) = \int_c^x f(t)\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f sur $[a,b]$ qui s'annule en c.
À ce titre, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, et $F' = f$.

Corollaire 7.3. **TFA, version 2**

Toute fonction continue sur $[a,b]$ admet des primitives sur ce même intervalle.

Corollaire 7.4.

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et F une de ses primitives. Alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exercice 7.1.

Calculer, en primitivant *à vue*, les intégrales suivantes

$$i.\ \int_0^1 \sqrt{t}\mathrm{d}t, \qquad ii.\ \int_1^2 \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x, \qquad iii.\ \int_0^{\ln(2)} te^{t^2}\mathrm{d}t, \qquad iv.\ \int_1^x \frac{\mathrm{d}s}{s}, \qquad v.\ \int_0^\pi \sin^2(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

Exercice 7.2.

Calculer les limites, lorsque $n \to +\infty$, de

$$i.\ \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n \sqrt{k}, \quad ii.\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}, \quad iii.\ \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2}.$$

Exercice 7.3. **Fonction définie par une intégrale**

Soit F la fonction définie sur $]0;1[$ par $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$.

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ puis étudier ses variations.
2. Montrer que F peut se prolonger en une fonction continue sur $[0;1]$.

Remarque 7.2.

Si f est une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, alors on peut écrire, pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) = \mathrm{Re}(f)(t) + i\,\mathrm{Im}(f)(t)$ et définir l'intégrale de f sur $[a,b]$ par la formule

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}(f)(t)\mathrm{d}t + i\int_a^b \mathrm{Im}(f)(t)\mathrm{d}t.$$

On peut par exemple écrire, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\displaystyle\int_a^b e^{\lambda t}\mathrm{d}t = \frac{e^{\lambda b} - e^{\lambda a}}{\lambda}$.

Exercice 7.4.

Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(\theta)e^{\theta}\mathrm{d}\theta$.

1.2 Méthodes pratiques de calcul d'intégrales

⋆ Intégration par parties.

Théorème 7.5. **Intégration par parties**

Soient $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. On a alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{t} = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t.$$

☞ Lorsque l'on utilisera une intégration par parties, on n'oubliera pas de vérifier que les fonctions u, v sont $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle considéré, et **on fera apparaître cette hypothèse sur sa copie**.

Exercice 7.5.

Donner une primitive de $x \mapsto \ln(x)$ puis, avec la même méthode de $x \mapsto \arccos(x)$.

Exercice 7.6.

Pour tout entier n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^{-t}\mathrm{d}t$.

1. **a.** Montrer que pour tout entier n, on a $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
   b. En déduire que (I_n) converge, et déterminer sa limite.

2. **a.** Donner une relation entre I_n et I_{n+1}.
   b. En déduire un équivalent de I_n.

☞ Si (I_n) est une suite d'intégrales, une intégration par parties permet souvent de déterminer une relation entre I_n et I_{n+1}, dont on peut ensuite déduire une expression de I_n en fonction de n.

⋆ Intégrales de la forme $\displaystyle\int P(x)e^{ax}\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int P(x)\cos(bx)e^{ax}\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int P(x)\sin(bx)e^{ax}\mathrm{d}x$ où P est un polynôme et $a \in \mathbb{C}$

Pour intégrer le produit d'un polynôme et d'une exponentielle, il suffit d'effectuer des intégrations par parties successives, en dérivant le polynôme (jusqu'à obtenir un terme constant, ce qui requiert donc $\deg(P)$ intégrations par parties successives). En identifiant $\cos(ax)$ et $\sin(ax)$ comme les parties réelles et imaginaires de e^{iax}, la même méthode fonctionne pour intégrer les fonctions ci-dessus.

Exercice 7.7.

Calculer les intégrales $\displaystyle\int_0^1 (x^2+x+1)e^{-x}\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 x^2\cos(2x)e^{-x}\mathrm{d}x$.

⋆ Changement de variable.

La formule de dérivation d'une fonction composée permet d'établir la formule de changement de variable.

Théorème 7.6. **Formule de changement de variable**

Soient α, β des réels tels que $\alpha < \beta$. On se donne une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, et $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$. Alors

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\mathrm{d}t.$$

☞ Il est capital de se rappeler (et d'écrire sur sa copie) que la fonction φ doit être de classe $\mathcal{C}^1$.
Dans la majeure partie des exercices (mais pas toujours), le changement de variable est donné, sous la forme $u = u(t)$. On vérifie donc que u est de classe $\mathcal{C}^1$. On regarde ce que deviennent les bornes et surtout on oublie pas que $\mathrm{d}u = u'(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 7.8.

Donner une primitive de $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$ sur $\mathbb{R}$ en posant $u = \cos(x)$.

⋆ Calcul d'intégrales de la forme $\int R(e^x)\,\mathrm{d}x$ où R est une fraction rationnelle.

Pour intégrer une fraction rationnelle (*i.e.* un quotient de polynômes) en l'exponentielle, on pose $u = e^x$, ce qui permet de se ramener à une fraction rationnelle en u. Si cette dernière ne s'intègre pas aisément, on utilise la méthode détaillée dans la suite.

Exercice 7.9.

En posant $u = e^x$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x$.

⋆ Calcul d'intégrales de la forme $\int \sin^q(x)\cos^p(x)\mathrm{d}x$ où p, q sont des entiers naturels.

✗ Si p ou q est impair on effectue un changement de variable. Plus précisément, si p est impair, on pose $u = \sin(x)$ et si q est impair, on pose $u = \cos(x)$.

✗ Si p et q sont pairs, on linéarise le produit $\cos^p(x)\sin^q(x)$ à l'aide des formules d'Euler.

Exercice 7.10.

Calculer les intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3(x)\cos^2(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(x)\mathrm{d}x$.

⋆ Calcul d'intégrales de la forme $\int \dfrac{P(x)}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$ où P est un polynôme de degré supérieur ou égal à 2.

Pour intégrer une fraction rationnelle de la forme $\dfrac{P(x)}{x^2+px+q}$ où P est un polynôme tel que $\deg(P) > 1$, on commence par effectuer la division euclidienne de P par x^2+px+q, ce qui permet de se ramener à une fraction rationnelle de la forme $\dfrac{ax+b}{x^2+px+q}$.
On calcule alors les racines du polynôme X^2+pX+q puis on utilise éventuellement le résultat suivant (admis) pour faire apparaître une combinaison d'éléments simples à primitiver.

Théorème 7.7. **Décomposition en éléments simples**

Soient a, b, p, q des réels. On note Δ le discriminant du polynôme du second degré $x^2 + px + q$.

i. Si $\Delta > 0$, le polynôme possède deux racines distinctes c et d, et il existe alors deux réels α, β tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{c, d\}, \quad \frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{ax+b}{(x-c)(x-d)} = \frac{\alpha}{x-c} + \frac{\beta}{x-d}.$$

ii. Si $\Delta = 0$, le polynôme possède une racine double c, et il existe alors deux réels α, β tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{c\}, \quad \frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{ax+b}{(x-c)^2} = \frac{\alpha}{(x-c)^2} + \frac{\beta}{x-c}$$

.

On distingue les cas pour la poursuite du calcul. En reprenant les notations du théorème ci-dessus,

✗ **1er cas.** Si $\Delta > 0$,

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \int \frac{\alpha}{x-c}\mathrm{d}x + \int \frac{\beta}{x-d}\mathrm{d}x,$$

où chaque intégrale se calcul à l'aide de logarithmes.

✗ **2ème cas.** Si $\Delta = 0$,

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \int \frac{\alpha}{(x-c)^2}\mathrm{d}x + \int \frac{\beta}{x-c}\mathrm{d}x,$$

où la première intégrale se calcule en reconnaissant la dérivée d'une inverse et la seconde avec un logarithme.

✗ **3ème cas.** Si $\Delta < 0$, on fait alors apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur, en cherchant deux réels α, β tels que

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \alpha \int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\mathrm{d}x + \beta \int \frac{1}{x^2+px+q}\mathrm{d}x.$$

La première intégrale se calcule en observant que $\frac{2x+p}{x^2+px+q}$ est la dérivée de $\ln|x^2+px+q|$.

Pour calculer la seconde, on met le polynôme $x^2 + px + q$ sous forme canonique:

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2}\mathrm{d}x$$

puisque le discriminant du dénominateur est strictement négatif (on a donc $q - p^2/4 > 0$).

On pose alors $u = x + p/2$ ce qui permet de se ramener à une intégrale de la forme $\displaystyle\int \frac{du}{u^2 + \left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2}$, que l'on peut calculer en utilisant la formule $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)\right) = \dfrac{1}{x^2+a^2}$.

Exercice 7.11.

Calculer les intégrales

$$i. \int_0^{1/2} \frac{2x+1}{x^2+x-2}\mathrm{d}x, \quad ii. \int_0^{1/2} \frac{2x+1}{x^2-2x+1}\mathrm{d}x, \quad iii. \int_0^{1} \frac{-3x+2}{x^2-x+1}\mathrm{d}x.$$

1.3 Primitives usuelles

Chacune des lignes du tableau ci-dessous se lit comme suit: la fonction f admet (sur son intervalle de définition) F pour primitive, éventuellement sous la condition *cond*. La lettre u désigne une fonction, et c la constante d'intégration.

$f(x)$	$F(x)$	*cond*
e^{zx}	$\frac{1}{z}e^{zx}+c$	$z\in\mathbb{C}^*$
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert+c$	
x^α	$\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+c$	$\alpha\neq-1$
$\alpha u'u^{\alpha-1}$	$u^\alpha+c$	$\alpha\neq0$
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}+c$	
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+c$	$a>0, a\neq1$
$\cos(ax)$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax)+c$	$a\neq0$
$\sin(ax)$	$-\dfrac{1}{a}\cos(ax)+c$	$a\neq0$
$\dfrac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)$	$\tan(x)+c$	
$\dfrac{1}{\sin^2(x)}=1+\operatorname{cotan}^2(x)$	$\operatorname{cotan}(x)+c$	
$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$\dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)+c$	$a\neq0$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)+c$	
$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)+c$	

2 Intégrale impropre et intégrale convergente

2.1 Définitions

Définition 7.2. **Intégrale impropre**

Soient $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$ (avec $a<b$) et f une fonction continue sur l'intervalle **semi-ouvert** $[a;b[$ qui peut être borné, ou non). On dit que l'intégrale

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

est **impropre** en b. Si la fonction est continue sur l'intervalle semi-ouvert $]a;b]$, l'intégrale précédente est alors impropre en a.

Le caractère impropre en a (ou en b) peut avoir plusieurs origines : la fonction f n'est pas définie en a ou la borne a est elle-même infinie ce qui dans les deux cas se représentent graphiquement par une surface "infinie".

Il existe un cas qu'on peut immédiatement traiter.

Proposition 7.8.

Soit f une fonction continue sur un intervalle borné semi-ouvert $[a;b[$ admettant une limite finie en b (*i.e.* prolongeable par continuité à b). On dit que l'intégrale

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

est **faussement impropre** (en b) et que c'est une intégrale ***convergente***.

Exercice 7.12.

Que peut-on dire des intégrales suivantes?

$$i.\ \int_0^1 t\ln(t)\mathrm{d}t,\qquad ii.\ \int_0^1 \frac{e^x-1}{x}\mathrm{d}x$$

Le caractère prolongeable par continuité est suffisant à donner un sens à l'intégrale, mais pas nécessaire comme on va le voir avec la définition et les exemples suivants.

Définition 7.3. **Convergence d'une intégrale impropre (d'un seul côté)**

Soit f une fonction continue sur l'intervalle semi-ouvert $[a\,;b[$ où $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

i. On dit que l'intégrale (impropre à droite, donc en b) $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est **convergente** lorsque la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers b, et dans ce cas, on pose

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

ii. Sinon, on dit que l'intégrale **diverge**.

On définit de la même façon la notion d'intégrale convergente lorsque f est continue sur $]a;b]$ et que l'intégrale est impropre en a (à gauche donc) :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to a}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t.$$

☞ **Attention**, si l'intégrale est impropre des deux côtés, il faut traiter la convergence séparément pour chacune des bornes (voir ci-dessous).

☞ Étudier la nature d'une intégrale signifie déterminer si l'intégrale est convergente ou non.

Exercice 7.13.

Déterminer la nature des intégrales suivantes

$$i.\ \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t, \qquad ii.\ \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t}, \qquad iii.\ \int_e^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}, \qquad iv.\ \int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}.$$

Définition 7.4. **Convergence d'une intégrale impropre des deux côtés**

Soit f une fonction continue sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ (où $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$). Soit $c \in]a,b[$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si **les deux intégrales**

$$\int_a^c f(t)\mathrm{d}t \qquad \textbf{et} \qquad \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$$

convergent. Dans ce cas, on a

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Remarque 7.3.

La relation de Chasles prouve que la définition ci-dessus ne dépend pas du point c choisi.

Exercice 7.14.

Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ est convergente et calculer sa valeur.

Remarque 7.4.

On prendra garde au fait que, bien que l'on ait

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} x\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty} 0 = 0,$$

l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{d}x$ ne converge pas, puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\mathrm{d}x$ ne convergent pas!

On ne peut donc pas faire tendre simultanément les deux bornes vers l'infini. On doit vraiment montrer la convergence des deux intégrales impropre séparément.

On peut ensuite généraliser la notion d'intégrale aux fonctions continues sauf en un nombre fini de points.

Définition 7.5. **Intégrale impropre plusieurs fois**

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a \leq b$.
On se donne encore $a_1, \dots, a_n$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ tels que $a_1 = a < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$.
On considère alors une fonction f continue sur $]a, b[$, sauf éventuellement en chacun des points $a_1, \dots, a_n$.
On dit que l'intégrale de f sur $]a, b[$ converge si chacune des intégrales $\displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\mathrm{d}t$ converge, et lorsque c'est le cas on pose

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\mathrm{d}t.$$

On peut enfin généraliser cette notion aux fonctions à valeurs complexes.

Définition 7.6. **Intégrale impropre à valeurs complexes**

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, tels que $a \leq b$. Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$, continue sur $]a, b[$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.
On dit que l'intégrale de f sur $]a, b[$ converge si les intégrales impropres $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\mathrm{d}t$ convergent, et lorsque c'est le cas on pose

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\mathrm{d}t + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\mathrm{d}t.$$

2.2 Intégrales de référence

Parmi les intégrales impropres dont il est facile de déterminer la nature, certaines ont un rôle central dans la mesure où elles apparaissent souvent et qu'on s'en sert pour justifier de la nature d'autres intégrales par comparaison.

Proposition 7.9.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.
Auquel cas,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}.$$

Proposition 7.10. **L'intégrale de Riemann en $+\infty$**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
Auquel cas,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Remarque 7.5.

Dans la proposition précédente, le résultat reste vrai si l'on remplace la borne de gauche 1 par n'importe quel réel strictement positif.

Proposition 7.11. **L'intégrale de Riemann en 0**

Soit $\beta \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\beta}\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\beta < 1$.
Auquel cas,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\beta}\mathrm{d}x = \frac{1}{1 - \beta}.$$

Remarque 7.6.

On observera que les conditions de convergence en 0 et en $+\infty$ étant incompatibles, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ est divergente pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Corollaire 7.12.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et $a < b$ des réels. Les intégrales $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\mathrm{d}t$ et $\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha}\mathrm{d}t$ convergent si et seulement si $\alpha < 1$.

Proposition 7.13.

L'intégrale $\int_0^1 \ln(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut -1.

2.3 Propriétés de l'intégrale généralisée

Dans cette section, on fixe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a \leq b$. Les résultats suivants seront donc énoncés pour des intégrales impropres à droite (sauf mention du contraire), mais les résultats analogues à gauche sont également vrais.
Plus précisément, les résultats qui suivent étendent aux intégrales impropres à droite les propriétés algébriques élémentaires des intégrales rappelés en début de chapitre; bien entendu on dispose de résultats analogues concernant les intégrales impropres à gauche, ou plusieurs fois impropres.

Proposition 7.14. **Antisymétrie**

Soit une fonction f continue sur $[a, b[$. Alors $\int_b^a f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge, et lorsque c'est le cas, on a

$$\int_b^a f(t)\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Proposition 7.15. **Linéarité**

Soient deux fonctions f, g continues sur $[a, b[$.
Si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ convergent, alors $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t$ converge, et on a

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

☞ Le résultat ci-dessus permet notamment de démontrer que l'ensemble des fonctions admettant une intégrale sur $[a, b[$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions définies sur $[a, b[$.

Remarque 7.7.

Avant d'écrire

$$\int_a^b (f(t) + g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t,$$

on vérifiera qu'au moins deux des trois intégrales considérées convergent; on pourra alors en déduire que la troisième converge, puis que la linéarité s'applique.
Mais attention à ne pas écrire qu'une intégrale convergente est somme de deux intégrales divergentes (voir l'exercice ci-dessous).

Exercice 7.15.

Calculer $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t+1)}\mathrm{d}t$.

Proposition 7.16. **Croissance**

Soient deux fonctions f, g continues sur $[a,b[$. On suppose que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ convergent. On a alors le résultat suivant:

$$\forall t \in [a,b[,\ f(t) \leq g(t) \implies \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

Proposition 7.17. **Positivité**

Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue et à valeurs positives telle que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge. On a alors les résultats suivants.

i. $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geq 0.$

ii. $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0 \iff \forall t \in [a,b[,\ f(t) = 0.$

2.4 À propos d'une condition nécessaire de convergence

Proposition 7.18.

Soit $a \in \mathbb{R}$, et $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que f possède une limite ℓ en $+\infty$.
On a alors

$$\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \text{ converge} \implies \ell = 0.$$

Remarque 7.8.

Attention à bien comprendre cet énoncé ; la conclusion s'applique seulement si on sait que f admet une limite en $+\infty$. En effet, il est possible de trouver une fonction f continue, sans limite en $+\infty$, dont l'intégrale converge.

Exercice 7.16.

On considère la fonction f, affine par morceaux, nulle sur $\mathbb{R}_-$, définie et **continue** sur $\mathbb{R}$ comme suit : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- ✗ $f\left(n+\frac{1}{2}\right) = 1$;
- ✗ sur $[n, n+1]$, f est nulle en dehors de $\left[n+\frac{1}{2}-\frac{1}{n^2}; n+\frac{1}{2}+\frac{1}{n^2}\right]$.

1. **a.** Dessiner l'allure de la courbe de f.
b. Justifier que $f(x)$ n'admet pas de limite lorsque $x \to +\infty$.

2. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$ puis $\int_0^n f(t)\mathrm{d}t$. En déduire la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

Remarque 7.9.

Naturellement aussi, la réciproque est fausse. La fonction f peut avoir une limite finie nulle en $+\infty$ sans que l'intégrale converge (on aura un contre-exemple en tête à tout moment).
Si par contre la limite existe et n'est pas nulle, on est certain que l'intégrale diverge. On dit même qu'elle **diverge grossièrement**.

2.5 Comparaison pour des fonctions de signe constant

Lemme 7.19.

Soit une fonction f continue et positive sur $[a,b[$. Alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a,b[$, et lorsque c'est le cas, on a

$$\forall x \in [a,b],\ \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Théorème 7.20. **Comparaison des fonctions positives**

Soient deux fonctions f, g continues sur $[a, b[$ tels que

$$\forall t \in [a, b[,\ 0 \leq f(t) \leq g(t)$$

On a alors les résultats suivants.

i. Si $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge, et l'on a $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.

ii. Si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge, alors $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ diverge.

☞ Quitte à changer f en $-f$, on peut adapter ce résultat au cas des fonctions négatives. **L'essentiel ici est donc que la fonction soit de signe constant**.

Exercice 7.17.

Justifier que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$ est convergente.

Théorème 7.21. **Comparaison des équivalents de signe constant**

Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et de signe constant au voisinage de b.

Si $f \underset{b}{\sim} g$, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Exercice 7.18.

Justifier que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}(x)}$ est convergente.

Exercice 7.19.

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$ converge.

2.6 Calculs d'intégrales généralisées

⋆ Utilisation d'une primitive

Proposition 7.22.

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a \leq b$. Soient f une fonction continue sur $]a, b[$, et F une primitive de f sur $]a, b[$.

Si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge, on a:

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x \to b^-} F(x) - \lim_{x \to a^+} F(x).$$

⋆ Intégration par parties

Théorème 7.23. **IPP généralisée**

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, tels que $a \leq b$, et u, v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$.
Si le produit uv admet des limites finies en a^+ et b^-, alors:

i. Les deux intégrales $\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature;

ii. $\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t$ lorsque les intégrales convergent.

Exercice 7.20.

Calculer $\int_0^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t$.

⋆ Changement de variable

Théorème 7.24. **Changement de variable généralisé**

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a \leq b$. Soient φ une bijection strictement monotone de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$, et f une fonction continue sur l'intervalle $]\alpha,\beta[$ où $\alpha = \lim\limits_{x\to a^+} \varphi(x)$ et $\beta = \lim\limits_{x\to b^-} \varphi(x)$.

Alors, les intégrales $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature, et si elles convergent alors elles sont égales.

☞ Lorsque l'on posera $t = \varphi(u)$ dans $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$, on n'oubliera pas de vérifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et **strictement monotone** sur $]a,b[$.

Exercice 7.21.

Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}\mathrm{d}t$ en posant $u = \sqrt{t}$.

3 Fonctions intégrables

Sauf mention explicite du contraire, I dans cette section désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

3.1 Définition

Définition 7.7. **Fonction intégrable**

Soit f une fonction continue sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que f est **intégrable** sur I si $\displaystyle\int_I |f(t)|\mathrm{d}t$ est convergente. On note $L^1(I)$ l'ensemble des fonctions intégrables sur I.

Lorsque f est intégrable sur I, on dit aussi que l'intégrale $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t$ est **absolument convergente.**

Remarque 7.10.

✗ Si f est de signe constant, alors cette notion équivaut à la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t$.

✗ Si f est continue sur $I = [a,b]$ segment, alors f est automatiquement intégrable: on a une intégrale ordinaire.

3.2 Propriétés des fonctions intégrables

Théorème 7.25.

Si f est intégrable sur I, alors $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t$ converge.

☞ En d'autres termes, la convergence absolue entraîne la convergence "simple".

Remarque 7.11.

✗ Ce théorème donne une condition **suffisante** de convergence d'une intégrale impropre: pour prouver que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge, il suffit de prouver que $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ converge.

✗ La réciproque du théorème ci-dessus est fausse (voir l'**Exercice 7.23.**).
Une telle intégrale est dite *semi-convergente*.

Exercice 7.22.

Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$ converge.

Exercice 7.23. **Intégrale semi-convergente**

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ converge mais que $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$.

Théorème 7.26. **Structure de s-ev**

Si f, g sont intégrables sur I et si λ, μ sont des scalaires, alors $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur I de sorte que:

$$\int_I (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_I f(t)\mathrm{d}t + \mu \int_I g(t)\mathrm{d}t.$$

☞ L'ensemble $L^1(I)$ est donc un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions définies sur celui-ci.

Théorème 7.27. **Inégalité triangulaire**

Si f est intégrable sur I, alors $\left|\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Théorème 7.28. **Intégrale nulle**

Si f est continue et intégrable sur I, alors

$$\int_I |f(t)|\mathrm{d}t = 0 \Longrightarrow (\forall t \in I,\ f(t) = 0)\,.$$

3.3 Théorèmes de comparaison pour les fonctions intégrables

Théorème 7.29. **Comparaison des équivalents**

Soient f, g deux fonctions continues sur $I = [a, b[$ telles que $f \underset{b}{\sim} g$. Alors f est intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si g est intégrable sur $[a, b]$.

Théorème 7.30. **Comparaison des o et des O à droite**

Soient f, g deux fonctions continues sur $I = [a, b[$. Si g est intégrable sur $[a, b]$ et si $f \underset{b}{=} o(g)$ (ou si $f \underset{b}{=} O(g)$), alors f est intégrable sur $[a, b]$.

☞ On a des résultats analogues si f, g sont continues sur $I =]a, b]$ et si les relations de comparaisons ci-dessus ont lieu à gauche (en a).

Exercice 7.24.

Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\sin(t)\ln(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ converge.

Corollaire 7.31. **Test de Riemann à l'infini**

Soit f continue sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$. S'il existe $\alpha > 1$ tel que

$$\lim_{t\to+\infty} t^\alpha |f(t)| = 0$$

alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

4 Permutation somme et intégrale

La permutation de limites et une opération toujours délicate et qu'on ne peut pas systématiquement faire. On conclut alors ce chapitre avec un théorème d'interversion dont les hypothèses doivent être rigoureusement vérifiées avant application.

Théorème 7.32. **Permutation somme et intégrale**

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions intégrables sur un même intervalle I telles que, pour tout $t \in I$, la série $\sum_{n\geq 0} f_n(t)$ est convergente. On note alors

$$f : t \in I \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t).$$

On suppose que :

i. f est continue sur I, sauf éventuellement aux bords de I ;
ii. La série $\sum_{n\geq 0} \int_I |f_n(t)|\mathrm{d}t$ est convergente.

Alors, f est intégrable sur I et

$$\int_I f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 7.25.

Montrer que

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}.$$

5 Sélection d'exercices - Travaux dirigés

5.1 Intégration sur un segment

Exercice 7.26.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition.

$a : x \mapsto \tan x$ $\quad b : x \mapsto \dfrac{(\ln x)^3}{x}$ $\quad c : x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{3-x}}$

$d : x \mapsto \arcsin x$ $\quad e : x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$ $\quad f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$

$g : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ $\quad h : x \mapsto \cos^6 x$ $\quad i : u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{u}+\sqrt{u^3}}$

$j : x \mapsto (1+x)\arctan(x)$ $\quad k : x \mapsto x^2 e^x$ $\quad l : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

$m : x \mapsto x\sqrt{1+x}$ $\quad n : x \mapsto \dfrac{e^x}{\mathrm{ch}x+1}$ $\quad o : x \mapsto \dfrac{x^4}{x^4-1}$

Exercice 7.27. **Lemme de Riemann-Lebesgue**

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ où $a \leq b$ sont des réels, à valeurs dans $\mathbb{C}$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{int}\mathrm{d}t = 0.$$

Exercice 7.28.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la suite (I_n) converge, et déterminer sa limite.
2. Déterminer un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.
3. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.

Exercice 7.29.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n(t)\mathrm{d}t$.

1. Donner une relation entre I_n et I_{n+2}.
2. En déduire la limite de (I_n).
3. Calculer I_{2p} en fonction de p, puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, où

$$S_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}.$$

Exercice 7.30. **Oral Math II 2025**

On pose : $u_n = \displaystyle\int_0^1 (\ln(1+t))^n \ \mathrm{d}t$.

1. Montrer que (u_n) est monotone, convergente, puis déterminer la valeur de sa limite.
2. Établir une relation entre u_{n+1} et u_n. En déduire que $(n+1)u_n \leq 2(\ln 2)^{n+1} \leq (n+2)u_n$.
3. Déterminer un équivalent simple de u_n. La série de terme général $\dfrac{u_n}{(\ln 2)^n}$ converge-t-elle?

Exercice 7.31. **Oral Math II 2023**

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{x^n} \ \mathrm{d}x$.

1. Calculer u_1. Montrer que la suite (u_n) est monotone et convergente.
2. Montrer que : $\forall y \in [0,1], 1+y \leq \mathrm{e}^y \leq 1+(\mathrm{e}-1)y$. En déduire $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
3. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\sum (u_n - \ell)^\alpha$ est-elle convergente?

Exercice 7.32. **Oral Math II 2022**

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \displaystyle\int_0^{\cos^2(x)} \mathrm{Arccos}(\sqrt{t})\mathrm{d}t + \int_0^{\sin^2(x)} \mathrm{Arcsin}(\sqrt{t})\mathrm{d}t$.

1. Montrer que : $\forall t \in [0,1], \mathrm{Arccos}(t) + \mathrm{Arcsin}(t) = \dfrac{\pi}{2}$. Calculer $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
2. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$, paire, π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{Arccos}(\sqrt{t})\mathrm{d}t$.
4. Retrouver la valeur de I par le changement de variable $\varphi(t) = \mathrm{Arccos}(\sqrt{t})$.

5.2 Intégration généralisée

Exercice 7.33.

Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes ainsi que leur valeur en cas de convergence.

$$i.\ \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}, \qquad ii.\ \int_1^{+\infty} \frac{t\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}, \qquad iii.\ \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\mathrm{d}x,$$
$$iv.\ \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\mathrm{d}x, \qquad v.\ \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{3^t}, \qquad vi.\ \int_0^{+\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x.$$

Exercice 7.34.

Calculer les intégrales suivantes.

i. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^3}\mathrm{d}x$ *ii.* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(2x)\mathrm{d}x$ *iii.* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{2\mathrm{ch}(x)+1}\mathrm{d}x$ *iv.* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\sqrt{t}}$

v. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{3+2e^{-t}+e^{t}}$ *vi.* $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\mathrm{d}t$ *vii.* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ *viii.* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$

Exercice 7.35.

Déterminer la nature des intégrales suivantes

i. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^3+3t^2+1}}$, *ii.* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$, *iii.* $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3\ln(t)}$,

iv. $\displaystyle\int_0^{+\infty} u^k e^{-u^2}\mathrm{d}u \quad (k\in\mathbb{N})$, *v.* $\displaystyle\int_1^{2} \frac{\mathrm{d}t}{t(t-1)}$, *vi.* $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

Exercice 7.36. **Oral Math II 2018**

1. Justifier que $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\mathrm{d}t$ converge.

2. Montrer que $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\mathrm{d}t$ converge et que $I=J$.

3. Calculer $I+J$. En déduire la valeur de I.

Exercice 7.37. **Oral Mines-Télécom 2025**

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $a_n=\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$.

1. Montrer que a_n est bien défini pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
2. Étudier la monotonie de la suite (a_n).
3. Montrer que la suite (a_n) converge.
4. Trouver une relation entre a_{n+1} et a_n.
5. Calculer a_1.

Exercice 7.38. **Oral Math II 2025**

1. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ et $x\in\mathbb{R}$. Établir la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} P(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.

2. Justifier que $\varphi_P : x\longmapsto \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} P(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\varphi_P'(x)$.

3. Soit l'application $f_x : P\in\mathbb{R}[X]\longmapsto \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} P(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$, et pour tout $k\in\mathbb{N}, e_k=X^k$.

a. Déterminer $f_x(e_0)$ et donner le lien entre $f_x(e_k)$ et $f_x(e_{k-1})$.
b. Montrer que f_x induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 7.39. **La fonction Gamma**

Pour tout réel α, on pose $\Gamma(\alpha)=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction Γ.
2. Établir une relation entre $\Gamma(\alpha+1)$ et $\Gamma(\alpha)$.
3. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 7.40. Oral Math II 2019, 2023

1. Montrer $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{1}{1+e^{-2x}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k e^{-2kx} + \frac{(-1)^n e^{-2nx}}{1+e^{-2x}}$.

2. En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}(x)} = 2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{2k+1} + I_n$, où I_n est une intégrale telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

3. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$.

4. Quel est le domaine de définition de la fonction $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}x^k$ où x est un réel?

Exercice 7.41. Intégrale de Dirichlet, Oral Math II 2026

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)\sin(2nt)}{\sin(t)}\mathrm{d}t$ et $v_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{t}\ \mathrm{d}t$.

1. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t$ converge.
2. Montrer que les intégrales u_n et v_n convergent.
3. Montrer que u_n ne dépend pas de n et calculer sa valeur.
4. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.
5. En déduire la valeur de l'intégrale I.

5.3 Permutations sommes et intégrales

Exercice 7.42.

On souhaite dans cet exercice démontrer l'égalité suivante :

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t^3}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+2}.$$

Pour cela, on part de l'égalité

$$\frac{1}{1+t^3} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{t^{3n+3}}$$

valide pour $t > 1$.

1. Expliquer pourquoi on ne peut pas appliquer le théorème de permutation du cours.

2. Pour $n \geq 0$ et $t > 1$, on pose $R_n(t) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{t^{3k+3}}$. Démontrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} R_n(t)\mathrm{d}t$ tend vers 0, et conclure.

Exercice 7.43.

1. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}\mathrm{d}t = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$.

2. Plus généralement, démontrer que, pour tous $a, b > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty}\frac{te^{-at}}{1-e^{-bt}}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(a+bn)^2}.$$

Annexe : Intégrale de Gauss et intégrales de Wallis

Les intégrales suivantes sont classiques et incontournables. Sous cette forme, l'exercice a été posé en ***Devoir Surveillé****, à l'automne 2024.*

On considère la suite d'intégrales (W_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}t.$$

1. Calculer W_0 et W_1.

2. À l'aide d'un changement de variable affine, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n \geq 0$ et que (W_n) est décroissante.

4. À l'aide d'une intégration par parties et de la relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{n+2} = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}.$$

En déduire que

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n.$$

5. On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, $J_n = (n+1)W_nW_{n+1}$.
En calculant $J_{n+1} - J_n$, montrer que la suite (J_n) est constante et préciser sa valeur.

6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'encadrement

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$

7. Montrer que $W_{n+1} \sim W_n$, lorsque $n \to +\infty$. Obtenir finalement que

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}},\ n \to +\infty.$$

8. Justifier rigoureusement la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$.

9. Montrer que, pour tout $x \in [0,1[$, $\ln(1-x) \leq -x$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Déduire de la question précédent que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

11. Montrer de même qu'on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\mathrm{d}x \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x$$

12. À l'aide du changement de variable $x = \sqrt{n}\cos(u)$, montrer que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x = \sqrt{n}W_{2n+1}.$$

On **admet** que le changement de variable $x = \sqrt{n}\tan(u)$ permet d'obtenir : $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x = \sqrt{n}W_{2n-2}$.
On a donc l'encadrement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\mathrm{d}x \leq \sqrt{n}W_{2n-2}.$$

13. À l'aide de la Question **7.**, conclure quant à la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$.