Math PT. 2026 - 2027

Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

8 Réduction des endomorphismes

Dans tout ce chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désignera l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Dans différentes situation rencontrées préalablement, on a déjà pu observer qu'un endomorphisme pouvait être représenté, dans des bases différentes, par des matrices différentes et dans certains cas des matrices plus "simples" ou plus "pratiques" pour le calcul, notamment par des matrices diagonales.

En effet, si A et D représentent un même endomorphisme f (défini sur un espace E de dimension n) dans deux bases différentes, notées respectivement $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, alors les matrices A et D sont semblables, le lien entre les deux matrices fait intervenir la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$

$$A = PDP^{-1}$$

ce qui implique notamment que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ (et même $k \in \mathbb{Z}$ si f est un automorphisme ou de manière équivalence si A est inversible)

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

et si D est diagonale, ses puissances se calculent très facilement

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \Longrightarrow D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

L'objectif de ce chapitre est, partant d'une matrice carrée A de taille n, de trouver, **si possible**, une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (et donc une matrice de passage P) de sorte que $P^{-1}AP$ soit une **matrice diagonale** ou triangulaire.

1 Endomorphismes et matrices diagonalisables

1.1 Exemples introductifs

Lors de l'introduction dans les **Chapitre 2 et 4** des matrices de projection et de symétrie, on a vu qu'on pouvait trouver des bases dans lesquelles les matrices de ces endomorphismes étaient diagonales.

Plus précisément, supposons que E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit F_1 un sous-espace de E de dimension k, F_2 un supplémentaire de F_1 dans E et p le projecteur sur F_1 parallèlement à F_2.
Alors, en prenant une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$ adaptée à la décomposition $E = F_1 \oplus F_2$, on obtient :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ & & & 1 & & \\ \vdots & & & & 0 & \vdots \\ & & & & & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} I_k & \mathbb{0}_{k,n-k} \\ \hline \mathbb{0}_{n-k,k} & \mathbb{0}_{n-k} \end{array}\right)$$

qui est bien diagonale. En effet, on a:

- ✗ $p(e_i) = e_i$ si $i \in [\![1, k]\!]$, car dans ce cas $e_i \in F_1$;
- ✗ $p(e_i) = 0_E$ si $i \in [\![k+1, n]\!]$, car dans ce cas $e_i \in F_2$.

Exercice 8.1.

Justifier que toute symétrie admet une matrice diagonale, dans une base bien choisie.

Remarque 8.1.

Il existe des endomorphismes qui ne peuvent pas être représentés par une matrice diagonale (voir l'**Exercice 8.2**).

1.2 Définition

Définition 8.1. **Endomorphismes et matrices diagonalisables**

Supposons que E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

- ✗ Un endomorphisme f est dit **diagonalisable** s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.
- ✗ Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **diagonalisable** s'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$, ou en d'autres termes si elle est semblable à une matrice diagonale.

Théorème 8.1.

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si l'une de ses matrices est diagonalisable. Auquel cas, toutes ses matrices sont diagonalisables.

2 Éléments propres d'un endomorphisme

L'observation suivante est fondamentale.

Si f possède, dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, une matrice diagonale de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

alors on a :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ f(e_k) = \lambda_k e_k$$

c'est-à-dire que $\mathcal{B}$ est une base de E formée de vecteurs colinéaires à leur image par f. Et cette condition est clairement nécessaire et suffisante. Elle motive les définitions suivantes.

2.1 Vecteurs propres, valeurs propres

Définition 8.2. **Valeur propre, vecteur propre**

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

- ✗ λ est appelé une **valeur propre** de f s'il existe un vecteur **non nul** $x \in E$ tel que $f(x) = \lambda x$.
- ✗ On appelle **vecteur propre de f associé à λ** tout vecteur **non nul** $x \in E$ tel que $f(x) = \lambda x$.
- ✗ L'ensemble des valeurs propres de f est appelé **spectre** de f et est noté $\mathrm{Sp}(f)$.
- ✗ Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, on note $E_\lambda(f)$ (ou E_λ si cela ne prête pas à confusion) l'ensemble $\mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{Id}_E - f)$: c'est l'ensemble des vecteurs propres associés à λ auquel on a ajouté 0_E.

Remarque 8.2.

✗ La relation $f(x) = \lambda x$ est appelée **équation aux éléments propres**.

✗ Un vecteur propre n'est jamais nul.

✗ Lorsque l'on est en dimension finie, cette définition s'étend naturellement aux matrices carrés: on parle de vecteurs propres ou de valeurs propres associés à une matrice carrée. Par exemple, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de M s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul tel que $MX = \lambda X$, et X est alors un vecteur propre de M associé à λ.

Théorème 8.2.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(f) &\iff \exists x \in E \setminus \{0\},\ f(x) = \lambda x \\ &\iff \mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{Id}_E - f) \neq \{0_E\} \\ &\iff \lambda \mathrm{Id}_E - f \text{ n'est pas injective} \end{aligned}$$

Et si E est de dimension finie on peut ajouter

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(f) &\iff \lambda \mathrm{Id}_E - f \text{ n'est pas bijective} \\ &\iff \det(\lambda \mathrm{Id}_E - f) = 0 \end{aligned}$$

Corollaire 8.3.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a les résultats suivants :

i. $E_\lambda = \mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{Id}_E - f)$, et donc E_λ est un sous-espace vectoriel de E.
ii. Le scalaire 0 est une valeur propre associée à f si et seulement si f n'est pas injectif.

2.2 Notion de polynôme caractéristique et conséquences en dimension finie

On suppose dans cette section que E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 8.4.

L'application $x \in \mathbb{K} \longmapsto \det(x \cdot \mathrm{Id}_E - f)$ est polynomiale de degré n, et son cœfficient dominant vaut 1.

Preuve. Résultat admis. □

Définition 8.3. **Polynôme caractéristique**

On appelle **polynôme caractéristique** de f, et on note $\chi_f(X)$, le polynôme défini par

$$\chi_f(X) = \det(X \cdot \mathrm{Id}_E - f).$$

Remarque 8.3.

✗ Le **Théorème 8.4** prouve que χ_f est bien un polynôme, qu'il est unitaire, et que son degré est égal à la dimension de l'espace.

✗ On définit de même le polynôme caractéristique d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en posant $\chi_M(X) = \det(X \cdot I_n - M)$, qui est égal au polynôme caractéristique de tout endomorphisme associé.

✗ Le polynôme caractéristique ne dépend pas de la base dans laquelle on se place pour le calculer (car si deux matrices sont semblables elles ont le même polynôme caractéristique).

Théorème 8.5.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a:

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \iff \chi_f(\lambda) = 0.$$

En d'autres termes, les valeurs propres de f sont les racines de son polynôme caractéristique χ_f.

Preuve. Il suffit de reprendre les équivalences vues précédemment:

$$\begin{aligned}\lambda \in \mathrm{Sp}(f) &\iff \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\} \\ &\iff f - \lambda \mathrm{Id}_E \text{ n'est pas injective} \\ &\iff f - \lambda \mathrm{Id}_E \text{ n'est pas bijective} \\ &\iff \det(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0 \iff \det(\lambda \mathrm{Id}_E - f) = 0\end{aligned}$$

□

Exercice 8.2.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dont la matrice dans une base donnée est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathrm{Sp}(f)$. En déduire que f n'est pas diagonalisable.

Proposition 8.6. **Valeurs propres d'une matrice triangulaire**

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire supérieure

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

sont ses termes diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Remarque 8.4.

✗ Ce résultat est en particulier vrai dans le cas des matrices diagonales.
✗ Ce résultat est encore vrai pour une matrice triangulaire inférieure (et la preuve est la même).

On peut enfin déduire de la notion de polynômes caractéristique des conséquences sur le nombre de valeurs propres d'un endomorphisme en dimension finie.

Théorème 8.7.

Toute matrice carrée à cœfficients complexes possède au moins une valeur propre complexe.

Preuve. Résulte du théorème de d'Alembert-Gauss. □

☞ On en déduit que toute matrice carrée à coefficients réels possède au moins une valeur propre complexe, mais celle-ci n'est **pas forcément réelle**.

Définition 8.4. **Multiplicité d'une valeur propre**

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. On appelle **ordre de multiplicité de la valeur propre** λ de f, et on note $m(\lambda)$, l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine du polynôme χ_f.

Corollaire 8.8. **Nombre de valeurs propres**

i. Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, alors f possède au plus $n = \dim E$ valeurs propres **distinctes**.

ii. Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, alors f possède exactement n valeurs propres **comptées avec leur ordre de multiplicité**.

Preuve. Résulte des **Théorèmes 8.4** et **8.5**. □

2.3 Propriétés des éléments propres

☞ Les résultats qui suivent sont vrais en dimension quelconque, éventuellement infinie.

Proposition 8.9.
Soit $x \in E$ un vecteur non nul. Alors x est un vecteur propre de f si et seulement si $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par f.

Proposition 8.10.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. Alors E_λ est stable par f.

Proposition 8.11.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. Si $\lambda \neq 0$ alors $E_\lambda \subset \mathrm{Im} f$, et de plus $E_0 = \mathrm{Ker}(f)$.

Le résultat suivant possède de nombreuses conséquences.

Proposition 8.12. **Principe de concaténation**
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Si $u_1, \dots, u_p$ sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ deux-à-deux distinctes de f, alors la famille $u_1, \dots, u_p$ est libre.

Corollaire 8.13. **Principe de concaténation, version 2**

i. Toute somme finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres deux-à-deux distinctes est directe.
ii. Toute union disjointe de familles libres provenant de sous-espaces propres deux-à-deux distincts est libre.

Exercice 8.3.

1. Déterminer le spectre de $D : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$.
2. Pour tout réel λ on pose $f_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x}$. En déduire que la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre.

☞ Les résultats qui suivent ne sont vrais que si on suppose que $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 8.14.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$ de multiplicité $m(\lambda)$. Alors:

$$1 \leq \dim \mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{Id}_E - f) \leq m(\lambda).$$

Corollaire 8.15.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. Si $m(\lambda) = 1$, alors $\dim E_\lambda = \dim \mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{Id}_E - f) = 1$.

Preuve. Résulte directement du théorème précédent. □

3 Quelques critères de réduction

On suppose dans cette section que E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

3.1 Critères de diagonalisabilité

On a déjà le résultat élémentaire suivant; il indique notamment que les endomorphismes diagonalisables sont ceux possédant *suffisament de vecteurs propres pour former une base.*

Théorème 8.16.

f est diagonalisable si et seulement si il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de f. Lorsque c'est le cas, si on appelle λ_i la valeur propre associée à e_i, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Exercice 8.4.

Soit $n \geq 2$. Est-ce que l'endomorphisme $\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}_n[X] \\ & P & \mapsto & P'' \end{array}$ est diagonalisable?

Rappel 8.1.

Un polynôme P est **scindé** s'il peut s'écrire comme un produit de polynômes de degré 1, c'est-à-dire s'il peut s'écrire

$$P = \alpha \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k),$$

avec $p \in \mathbb{N}$, et $\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_p$ des scalaires.

Ainsi, tout polynôme est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, mais pas nécessairement dans $\mathbb{R}[X]$.

Exemple 8.1.

$(X-1)^2X$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, $(X^2+1)X = (X-i)(X+i)X$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ mais pas dans $\mathbb{R}[X]$.

On peut déjà en déduire une condition suffisante de diagonalisabilité.

Théorème 8.17. **CS de diagonalisabilité**

Si f possède $n = \dim E$ valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable, et tous ses sous-espaces propres sont des droites.

En d'autres termes, si χ_f est scindé à racines simples, alors f est diagonalisable, et tous ses sous-espaces propres sont des droites.

Remarque 8.5.

Attention! Il est erroné de croire que si un endomorphisme est diagonalisable, alors il possède n valeurs propres distinctes! Un contre-exemple est donné par la matrice identité de taille $n \geq 2$, qui est diagonale et donc diagonalisable, bien qu'elle possède une seule valeur propre.

Exemple 8.2.

La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, alors qu'elle ne l'était pas dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 8.5.

Déterminer sans calcul si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ sont diagonalisables.

On peut enfin donner des conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité.

Théorème 8.18. **CNS de diagonalisabilité**

Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i. f est diagonalisable;

ii. $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} E_\lambda$;

iii. $\dim(E) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim(E_\lambda)$;

iv. χ_f est scindé, et $\dim E_\lambda = m(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$.

☞ Pour diagonaliser un endomorphisme f de matrice A dans une base $\mathcal{B}$, on procède le plus souvent comme suit.

✗ On calcule son polynôme caractéristique $\det(X \cdot I_n - A)$, si possible sous forme factorisée, et on détermine ses racines. S'il n'est pas scindé, f n'est pas diagonalisable.

✗ Si χ_f est scindé, on détermine pour chaque valeur propre λ_k son sous-espace propre $\mathrm{Ker}(\lambda_k \cdot I_n - A)$ en résolvant le système linéaire

$$(\lambda_k \cdot I_n - A) \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si, pour l'une au moins des valeurs propres la dimension du sous-espace propre est strictement inférieure à l'ordre de multiplicité, alors f n'est pas diagonalisable.

✗ Enfin, si f est diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_p$ (telles que $\forall k \in [\![1, p]\!],\ m_k = \dim E_{\lambda_k}$) alors on a :

$$A = P \left(\begin{array}{c|c|c|c} \lambda_1 I_{m_1} & \mathbb{0}_{m_1,m_2} & \cdots & \mathbb{0}_{m_1,m_p} \\ \hline \mathbb{0}_{m_2,m_1} & \lambda_2 I_{m_2} & & \vdots \\ \hline \vdots & & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbb{0}_{m_p,m_1} & \cdots & \cdots & \lambda_p I_{m_p} \end{array} \right) P^{-1},$$

où P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base

$$\mathcal{B}' = (\underbrace{u_{1,1}, \dots, u_{1,m_1}}_{\text{base de } E_{\lambda_1}}, \underbrace{u_{2,1}, \dots, u_{2,m_2}}_{\text{base de } E_{\lambda_2}}, \dots, \underbrace{u_{p,1}, \dots, u_{p,m_p}}_{\text{base de } E_{\lambda_p}}).$$

Enfin, on calcule P^{-1} à partir de P en cas de besoin (parfois seule la matrice diagonale est demandée).

Remarque 8.6.

L'ordre dans lequel apparaissent les valeurs propres sur la diagonale est l'ordre dans lequel on *concatène* les bases des sous-espaces propres associés.

Exercice 8.6.

Déterminer si chacune des matrices suivantes est diagonalisable, et si c'est le cas donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que cette matrice s'écrive PDP^{-1}.

$$i.\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad ii.\ B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.2 Critère de trigonalisabilité

Lorsqu'un endomorphisme n'est pas diagonalisable, on peut chercher à le *trigonaliser*.

Définition 8.5. **Endomorphismes et matrices trigonalisables**

Supposons que E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

✗ Un endomorphisme f est dit **trigonalisable** s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.

✗ Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **trigonalisable** s'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PTP^{-1}$, en d'autres termes si A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Théorème 8.19.

Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si l'une de ses matrices est trigonalisable.
Auquel cas, toutes ses matrices sont trigonalisables.

Théorème 8.20. **CNS de trigonalisabilité**

Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Preuve. La condition nécessaire est immédiate. La condition suffisante est admise. □

Corollaire 8.21.

Toute matrice est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Aucune méthode pratique de trigonalisation n'est au programme. Mais on étudiera attentivement l'exemple suivant (concrètement il faut savoir trigonaliser une matrice de taille 3 sans aide).

Exercice 8.7.

Trigonaliser la matrice $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3.3 Somme et produit des valeurs propres

On déduit de ce qui précède que la trace (*resp.* le déterminant) d'une matrice est égal à la somme (*resp.* le produit) de ses valeurs propres.
On peut aussi préciser certains coefficients de son polynôme caractéristique.

Proposition 8.22.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres (énumérées avec multiplicité). On a les résultats suivants :

i. $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$;

ii. $\det(A) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$;

iii. $\chi_A(X) = X^n - \mathrm{Tr}(A)X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(A)$.

Remarque 8.7.

Ce résultat reste vrai si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, mais il faut garder à l'esprit que ce sont toutes les valeurs propres complexes de A qui sont prises en compte.

4 Premières applications de la réduction

4.1 Puissances d'une matrice

☞ Pour calculer les puissances d'une matrice diagonalisable A, on écrit celle-ci sous la forme

$$A = P\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres (pas nécessairement deux-à-deux distinctes), et on utilise alors la relation

$$A^m = P\begin{pmatrix}\lambda_1^m & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2^m & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^m\end{pmatrix}P^{-1}$$

valable pour tout $m \in \mathbb{N}$.

☞ Pour calculer les puissances d'une matrice trigonalisable A, on écrit celle-ci sous la forme

$$A = P\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & \cdots & *\\ 0 & \lambda_2 & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & *\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres. On remarque alors que

$$T = \underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix}0 & & *\\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}}_{N}$$

avec N qui est *nilpotente* (c'est-à-dire que ses puissances sont nulles à partir d'un certain rang).
Dans le cas où D et N commutent, on peut alors utiliser la formule du binôme de Newton pour en déduire les puissances de A.

Exercice 8.8.

Calculer les puissances de $B = \begin{pmatrix}4 & 1 & -1\\ -6 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

4.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre p à cœfficients constants

⋆ **Cas** $p = 2$

On considère ici une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ vérifiant une relation de récurrence de la forme $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$, où $(b, c) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$, les premiers termes u_0, u_1 étant donnés. On cherche à exprimer u_n en fonction de n, u_0, u_1.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $U_n = \begin{pmatrix}u_{n+1}\\ u_n\end{pmatrix}$, ce qui donne $U_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix}-b & -c\\ 1 & 0\end{pmatrix}}_{A}U_n$, d'où $U_n = A^nU_0$..

Le problème se ramène donc au calcul de A^n.

Proposition 8.23.

Soit $(b,c) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$ et F l'ensemble des suites $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$.

i. F est un espace vectoriel de dimension 2.

ii. Si l'équation caractéristique admet deux racines distinctes α, β, alors
$$F = \{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}};\ \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n\}.$$

iii. Si l'équation caractéristique admet une unique racine réelle $\alpha \neq 0$, alors il existe des scalaires λ, μ tels que
$$F = \{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}};\ \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda n + \mu)\alpha^n\}.$$

Remarque 8.8.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées non réelles $re^{\pm i\theta}$, alors on peut démontrer qu'il existe deux réels λ, μ tels que
$$F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\ \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = r^n(\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta))\}.$$

⋆ Cas général

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_{p-1}$ des scalaires. On considère maintenant une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ vérifiant une relation de récurrence de la forme
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + a_{p-2}u_{n+p-2} + \cdots + a_0u_n,$$
les premiers termes $u_0, u_1, \dots, u_{p-1}$ étant donnés. On cherche à exprimer u_n en fonction de $n, u_0, u_1, \dots, u_{p-1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose
$$U_n = \begin{pmatrix} u_{n+p-1} \\ u_{n+p-2} \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} a_{p-1} & a_{p-2} & \cdots & \cdots & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
On a ainsi
$$\begin{pmatrix} u_{n+p} \\ u_{n+p-1} \\ \vdots \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{p-1} & a_{p-2} & \cdots & \cdots & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+p-1} \\ u_{n+p-2} \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \iff U_{n+1} = AU_n.$$
D'où $U_n = A^nU_0$ en raisonnant par récurrence. Le problème se ramène donc encore au calcul de A^n.
On ne présente ici que le cas où A admet p valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ (les autres cas sont hors-programmes).

Dans ce cas A est diagonalisable, et il existe donc une matrice de passage P tel que pour tout entier n:
$$U_n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_p^n \end{pmatrix} P^{-1}U_0$$
ce qui prouve que dans ce cas (u_n) est combinaison linéaire des p suites géométriques $(\lambda_1^n), (\lambda_2^n), \dots, (\lambda_p^n)$. On peut notamment en déduire que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension p (ce qui reste vrai même si A ne possède pas n valeurs propres distinctes).

Remarque 8.9.

On démontre aisément (voir le cours sur le déterminant) que $\chi_A(X) = X^p - a_{p-1}X^{p-1} - \cdots - a_1X - a_0$: on retrouve dans ce cas la notion d'équation caractéristique, dont les racines permettent d'exprimer le terme général de la suite considérée.

5 Sélection d'exercices - Travaux dirigés

Exercice 8.9.

Diagonaliser, si c'est possible, les matrices suivantes.

$$A=\begin{pmatrix}3&0&-1\\0&2&0\\2&0&0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-3&-2&5\\1&0&-1\\-2&-2&4\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}1&a&a\\-1&1&-1\\1&0&2\end{pmatrix}, F=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}, J=\begin{pmatrix}2&-4&1\\-1&-1&1\\5&-5&-2\end{pmatrix}.$$

Exercice 8.10.

On pose $M=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$.

1. Montrer que M est diagonalisable. En déduire M^n pour tout entier n.
2. On définit trois suites $(u_n),(v_n),(w_n)$ en posant

$$\begin{cases}u_0=1\\v_0=1\\w_0=-1\end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N}, \quad \begin{cases}u_{n+1}=\frac{1}{2}(-v_n+w_n)\\v_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+2v_n-w_n)\\w_{n+1}=\frac{1}{2}(-u_n-v_n+2w_n)\end{cases}$$

Exprimer u_n, v_n, w_n en fonction de $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 8.11.

Pour $\alpha\in\mathbb{R}$, on pose $A=\begin{pmatrix}-1&\alpha&\alpha\\1&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$

1. A est-elle diagonalisable ? Trigonalisable ?
2. Montrer que, si $\alpha\neq 0$, A est semblable à $T=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$, et déterminer $P\in\mathscr{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP=T$.
3. Si $\alpha\neq 0$, calculer A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 8.12. Suite récurrence linéaire d'ordre 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases}u_0=u_1=u_2=1\\\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+3}=11u_{n+2}-39u_{n+1}+45u_n\end{cases}.$$

En posant $U_n=\begin{pmatrix}u_n\\u_{n+1}\\u_{n+2}\end{pmatrix}$, déterminer u_n en fonction de n.

Exercice 8.13.

Trigonaliser les matrices suivantes, sous la forme T indiquée.

1. $A=\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix}, T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$
2. $C=\begin{pmatrix}3&2&1\\-1&2&1\\1&0&1\end{pmatrix}, T=\begin{pmatrix}2&a&b\\0&2&c\\0&0&2\end{pmatrix}$ où a,b,c sont à déterminer.

Exercice 8.14.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f\in\mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable.
Montrer $\mathrm{Ker}(f^2)=\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f^2)=\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 8.15. **Équation matricielle**

On considère l'application définie par $\Psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P'' + 2P' + P \end{array}$

1. Montrer $\Psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$.
2. Donner la matrice A de Ψ dans la base canonique.
3. Chercher les éléments propres de A. Est-elle diagonalisable?
4. Trouver une matrice B telle que $A = B^2$.

Exercice 8.16.

Soit $a \neq 0$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} en fonction de A et de I_3.
2. Montrer que si λ est valeur propre de A, alors $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$.
3. En déduire que A est diagonalisable et donner une matrice diagonale semblable à A.

Exercice 8.17.

Pour tout entier n non nul on considère $A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1+\frac{2}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer, en effectuant le moins de calculs possibles, que 1 et $1 + \frac{1}{n}$ sont les valeurs propres de A_n.
2. La matrice A_n est-elle inversible? Diagonalisable?
3. Pour tout entier $n > 0$ on pose $B_n = \prod_{k=1}^{n} A_k$.

La matrice A_n est-elle inversible? Diagonalisable (et si oui, déterminer sa forme diagonale et la matrice de passage associée)?

Exercice 8.18. **Extrait Devoir Maison n°4 - Automne 2025**

1. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Montrer que A est diagonalisable.

2. Le résultat reste-t-il vrai si $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ symétrique ?

Exercice 8.19.

Soit $n \geq 2$ un entier fixé. On considère la matrice $M_n = (m_{i,j}^{(n)})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$m_{i,j}^{(n)} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j+1 \\ \frac{1}{n}, & \text{si } j = n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

1. On note χ_n le polynôme caractéristique de M_n. Montrer que : $\chi_n(X) = X^n - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X^k$.

2. Montrer que toutes les racines complexes de χ_n sont dans le disque unité fermé.

3. On pose $P_n(X) = (X-1)\chi_n(X)$. Montrer que P_n admet une racine double et que toutes les autres sont simples.

4. M_n est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Annales de l'oral

Exercice 8.20. — Oral Math II 2025

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u, v deux endomorphismes de E.

1. Montrer que toute valeur propre non nulle de $u \circ v$ est valeur propre de $v \circ u$.

2. Montrer si E est de dimension finie, alors toute valeur propre de $u \circ v$ est aussi valeur propre de $v \circ u$.

3. On définit les endomorphismes u et v de $\mathbb{R}[X]$ par $u(P) = X'P$ et $v(P) = P'$.

a. Montrer que 0 est valeur propre de $u \circ v$.
b. La valeur 0 est-elle valeur propre de $v \circ u$? Qu'en conclure?

Exercice 8.21. — Oral Math II 2017

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par $M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 \cdots 0 & 1 \end{array}\right)$.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(A) \cup \{1\}$.

2. Soit $X \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$ et $Y = \begin{pmatrix} X \\ t \end{pmatrix}$. Calculer MY.

3. Dans la suite de l'exercice, on suppose $1 \notin \mathrm{Sp}(A)$.
a. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Déterminer $E_\lambda(M)$ en fonction de $E_\lambda(A)$.
b. Expliciter $E_1(M)$ et préciser sa dimension.

4. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A l'est.

Exercice 8.22. — Oral Mines-Télécom 2023

Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ canoniquement associé à M.

1. Montrer qu'il existe une seule droite vectorielle stable par f.

2. Montrer que le plan d'équation $ax + by + cz = 0$ est stable par f si et seulement si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est vecteur propre de $M^\top$.

3. Donner tous les plans vectoriels stables par f.

Exercice 8.23. — Oral Math II 2024

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a, b des réels fixés non nuls et $M_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 0 & b \\ a & \cdots & a & 0 \end{pmatrix}$, de taille $(n+1) \times (n+1)$.

On note χ_n le polynôme caractéristique de M_n.

1. Déterminer le rang de M_n. Que peut-on dire de son spectre ?

2. Dans cette question seulement, on suppose $a = b$. Que peut-on dire concernant la diagonalisation de M_n?

3. **a**. En utilisant le résultat de la Question **1.**, montrer que χ_n est divisible par X^{n-1}.
b. Calculer $\chi_2(x)$.
c. Montrer que $\chi_{n+1} = X \cdot \chi_n - abX^n$.
d. Exprimer χ_n en fonction de a, b et n.
e. Conclure que si $ab > 0$, alors M_n est diagonalisable.