Math PT. 2026 - 2027

Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

9 Probabilités élémentaires et Variables aléatoires

Dans ce chapitre nous allons reprendre la théorie des probabilités vue en première année, non seulement dans le cadre des univers finis mais aussi d'univers *dénombrables infinis*. La nécessité de cette extension provient des situations concrètes que l'on souhaite modéliser.
Prenons par exemple le jeu suivant : on lance une pièce de monnaie jusqu'à obtenir *Pile*. Pour modéliser cette situation, on est obligé d'utiliser un univers infini, puisque le nombre de lancers que l'on devra effectuer n'est *a priori* pas borné.
On (ré-)introduira ensuite la notion de variable aléatoire (discrète) ainsi que les premières propriétés de celles-ci avec une discussion autour des lois usuelles du programme.

1 Rappels : dénombrement dans les ensembles finis ou dénombrables

1.1 Cardinal d'un ensemble fini

Proposition 9.1.
Deux ensembles finis ont le même cardinal si et seulement si ils sont équipotents, c'est à dire et seulement si il existe une bijection entre eux.

Proposition 9.2.
Soient E, F deux ensembles finis, et $A \subset E$. On a les résultats suivants.

i. Si $E \cap F = \emptyset$, alors $\text{Card}\,(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F)$.
ii. Si $\overline{A}$ est le complémentaire de A dans E, alors $\text{Card}(A) = \text{Card}(E) - \text{Card}(\overline{A})$
iii. Dans tous les cas on a $\text{Card}\,(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F) - \text{Card}\,(E \cap F)$.

Proposition 9.3.
Soient E, F des ensembles finis. Alors $\text{Card}\,(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$.

Proposition 9.4.
Soient E et F deux ensembles finis. Alors $\text{Card}\left(F^E\right) = \text{Card}(F)^{\text{Card}(E)}$.

Proposition 9.5.
Soit E un ensemble fini. Alors l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est également fini, de cardinal $2^{\text{Card}(E)}$.

1.2 Dénombrement dans les ensembles finis

Listes ou tirages avec remise

Imaginons que chaque ensemble est une urne, et que ses éléments sont autant de boules dans celle-ci. Construire un ensemble revenant à prélever des éléments dans d'autres ensembles déjà existants, il y a une correspondance entre le dénombrement des ensembles mathématiques et le nombre d'issues associées aux tirages dans les urnes. Les résultats qui

suivent seront démontrés en utilisant ce paradigme.

Soit E un ensemble fini. On appelle liste d'éléments de E tout p-uplet $(e_1, \dots, e_p)$ d'éléments (pas nécessairement distincts...) de E, où $p \in \mathbb{N}$.

Paradigme. Soit E un ensemble à n éléments. Il y a autant de manières de construire une liste de p éléments de E que de prélever **avec remise** p .

Proposition 9.6. **Nombre de tirages avec remise**

Il y a n^p manières de tirer avec remise p boules dans une urne en contenant n.

Preuve. On a n choix au premier tirage, puis n choix au second (car on a remis la première boule dans l'urne), puis n au troisième,... et enfin n choix au p-ième. Il y a donc n^p configurations possibles au total (la **Proposition 9.3** assure que ces nombres de possibilités *se multiplient*). □

Exemple 9.1.

Redémontrons ainsi que le nombre d'applications $f : [\![1, p]\!] \to [\![1, n]\!]$ est égal à n^p.
Construire une application $f : [\![1, p]\!] \to [\![1, n]\!]$ c'est choisir les valeurs de $f(1), \dots, f(p)$ dans l'ensemble $[\![1, n]\!]$. Il y a n choix pour $f(1)$, n choix pour $f(2)$,... et toujours n choix pour $f(p)$. Ce qui donne au final n^p choix.

Arrangements ou tirages sans remise

Définition 9.1. **Arrangement**

Soit E un ensemble fini, et $1 \leq p \leq$ Card(E) un entier. On appelle **arrangement** de p éléments de E tout p-uplet $(e_1, \dots, e_p)$ d'éléments **distincts** de E.

☞ Deux éléments d'un arrangement sont toujours distincts: c'est ce qui les différencie des listes.

Paradigme. Soit E un ensemble à n éléments. Il y a autant de manières de construire un arrangement de $p \leq n$ éléments de E que de prélever (les unes après les autres et) **sans remise** p boules dans une urne en contenant n.

Définition 9.2.

Soient $n \geq p \geq 1$ des entiers. On note A_n^p le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble à n éléments, c'est-à-dire le nombre de manières de tirer **sans remise** p boules dans une urne en contenant n.

Proposition 9.7. **Nombre de tirages sans remise**

Soient $n \geq p \geq 1$. On a $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Preuve. Soit une urne contenant n boules; dénombrons le nombre de manières d'y choisir p boules sans remise. On a n choix au premier tirage, puis $n-1$ choix au second, puis $n-2$ choix au troisième,... et $n-(p-1)$ choix au p-ième. Il y a donc $n(n-1)\cdots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ configurations possibles au total. □

Exemple 9.2. **Injections de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$**

Soient $p \leq n$ des entiers. Le nombre d'injections $f : [\![1, p]\!] \to [\![1, n]\!]$ est égal à A_n^p.

Construire une application $f : [\![1, p]\!] \to [\![1, n]\!]$ c'est choisir les valeurs de $f(1), \dots, f(p)$ dans l'ensemble $[\![1, n]\!]$. Pour que f soit injective, il faut et il suffit que ces valeurs soient deux à deux distinctes. Cela prouve que construire une injection $f : [\![1, p]\!] \to [\![1, n]\!]$ équivaut à choisir un arrangement de p éléments sur les n (le premier élément choisi sera $f(1)$, le second sera $f(2)$,...), d'où le résultat.

Proposition 9.8.

Soient E et F deux ensembles finis tels que Card$E = p$ et Card$F = n$ avec $p \leq n$. Alors le nombre d'injections $f : E \to F$ est égal à A_n^p.

Application des arrangements aux permutations d'un ensemble

Définition 9.3. **Permutations d'un ensemble fini**

Soit E un ensemble fini. On appelle **permutation** de E toute bijection de E dans E, et on note $\mathfrak{S}(E)$ l'ensemble des permutations de E.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$.

Proposition 9.9.

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors $\text{Card}\,(\mathfrak{S}(E)) = n!$.

Preuve. On sait que si $f : E \to E$, alors f est bijective si et seulement si elle est injective. Or il y a A_n^n injections de E dans E en vertu de la **Proposition 9.2**, ce qui donne le résultat. □

Corollaire 9.10.

Soient E, F deux ensembles finis tels que $\text{Card}E = \text{Card}F = n$. Alors le nombre de bijections $f : E \to F$ est égal à $n!$.

Proposition 9.11.

Il existe $n!$ manières d'ordonner les éléments d'un ensemble de cardinal n.

Preuve. Ordonner les éléments de E revient à attribuer à chacun d'eux un unique numéro, compris entre 1 et n. Le nombre recherché est donc le nombre de bijections entre E et $[\![1, n]\!]$, soit $n!$. □

Exemple 9.3.

Le nombre de mots que l'on peut écrire avec les lettres P, I, Z, Z, A n'est pas égal à 5!. En effet, si l'on prend un mot écrit avec ces 5 lettres et qu'on permute les deux Z, on obtient encore le même mot: il n'y a donc que $\frac{5!}{2!}$ manières d'arranger ces lettres entre elles.

Exercice 9.1.

Combien y a-t-il d'anagrammes du mot *AVADAKEDAVRA* ?

Combinaisons ou tirages simultanés

Définition 9.4. **Combinaison**

Soit E un ensemble fini, et $1 \leq p \leq \text{Card}(E)$ un entier. On appelle **combinaison** de p éléments parmi E tout sous-ensemble de E de cardinal p (c'est-à-dire tout ensemble de p éléments issus de E).

Exemple 9.4.

Si $E = \{a, b, c\}$, alors $\{a, b\}$ est une combinaison de deux éléments parmi E, et (a, b) est arrangement de deux éléments de E.

Remarque 9.1.

Il existe dans les uplets (arrangements et listes) une notion d'ordre, absente des ensembles:

- ✗ lorsque l'on représente un ensemble, on ne se préoccupe pas de l'ordre dans lequel on énumère ses éléments. Par exemple, les deux ensembles $\{a, b\}$ et $\{b, a\}$ sont égaux;
- ✗ par contre, on considère que les deux uplets (a, b) et (b, a) sont distincts: l'ordre dans lequel apparaissent a et b importe.

La différence entre une combinaison et un arrangement (ou une liste) est donc que les éléments d'un arrangement (ou d'une liste) sont ordonnés, contrairement à ceux d'une combinaison. Ils sont en outre deux à deux distincts, contrairement à ceux d'une liste.

Paradigme. Soit E un ensemble à n éléments, et $p \leq n$. Il y a autant de manières de construire une partie à p éléments de E que de prélever simultanément (on parle de "poignée") p boules dans une urne en contenant n.

Proposition 9.12.

Soient $1 \leq p \leq n$ des entiers. Le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments est $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Preuve. Soit U une urne contenant n boules. Commençons par choisir p boules sans remise: il y a

$$A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

choix possibles.
Mais tous ces tirages ne correspondent pas à des ensembles de boules différents. Il reste donc à dénombrer, étant donné un ensemble à p éléments, combien de tirages différents lui correspondent : ce nombre est égal à $p!$, puisqu'il s'agit du nombre de manières d'ordonner p éléments (c'est-à-dire de choisir leur ordre d'apparition). Finalement, le nombre recherché est donc égal à $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ divisé par $p!$, d'où le résultat. □

Exemple 9.5.

Il y a $\binom{n}{p}$ applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

En effet, on commence par choisir l'image de f, c'est-à-dire un ensemble I de cardinal p dans $[\![1,n]\!]$: il y a pour cela $\binom{n}{p}$ possibilités.
Il suffit alors d'observer qu'il n'y a rien d'autre à choisir: puisque f est croissante, le plus petit élément de I sera nécessairement $f(1)$, le second plus petit sera nécessairement $f(2)$,..., et le plus grand sera nécessairement $f(p)$. D'où le résultat.

Exercice 9.2.

Un maître d'école distribue des bons points à ses 24 élèves, sous la forme d'images plastifiées.

1. On suppose que le maître d'école distribue 12 images deux à deux différentes. Combien y a-t-il de distributions possibles
   a. s'il donne au plus une image à chaque élève?
   b. si chaque élève peut recevoir un nombre quelconque d'images?
2. Reprendre la Question **1.a.** dans le cas où les images sont toutes identiques.

1.3 Ensembles dénombrables

Définition 9.5. **Ensemble (fini ou dénombrable)**

- ✗ Un ensemble E est dit **dénombrable** s'il est équipotent à $\mathbb{N}$, c'est-à-dire s'il existe une bijection entre E et $\mathbb{N}$.
- ✗ Un ensemble E est dit **fini ou dénombrable** s'il est équipotent à une partie de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire s'il existe une bijection entre E et une partie de $\mathbb{N}$.

Exemple 9.6.

$\{e,\pi\}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$ et $\left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$ sont finis ou dénombrables.

Proposition 9.13.

Un ensemble E non vide est fini ou dénombrable si et seulement si on peut l'écrire sous la forme $E = \{x_i;\ i \in I\}$, où $I \subset \mathbb{N}$ et où les x_i sont distincts.

☞ On peut démontrer que si E est fini ou dénombrable, alors:

- ✗ soit il est de cardinal fini, et alors il est équipotent à une partie finie de $\mathbb{N}$;
- ✗ soit il est de cardinal infini, et alors il est équipotent à $\mathbb{N}$.

Exemple 9.7.
Tous les ensembles ne sont pas dénombrables : $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable et $[0,1]$ non plus.

Proposition 9.14.
Le produit cartésien de deux ensembles finis ou dénombrables est fini ou dénombrable.

Exemple 9.8.
$\mathbb{N}^p$ est dénombrable pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

On peut démontrer que l'union d'un nombre dénombrable d'ensembles dénombrables reste dénombrable.

Proposition 9.15.
$\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Méthodologie du dénombrement

On conclue ce chapitre par un "point méthode" pour savoir comment dénombrer les possibilités offertes par une situation donnée, à l'aide des outils précédemment introduits.

✎ **On décompose la situation:**

✗ Si la situation à étudier peut se décrire en plusieurs cas **disjoints** (à l'aide par exemple d'un "ou bien" ou "soit"), alors le dénombrement peut s'obtenir en **ajoutant** les dénombrement de chacun des cas.

✗ Si la situation à étudier peut être décrite par plusieurs **étapes successives** ("puis", "et", ...) alors le dénombrement peut s'obtenir en **multipliant** les dénombrements de chacune des étapes.

✗ Il peut être parfois beaucoup plus simple de dénombrer l'ensemble complémentaire.

✎ **On dénombre chaque composante de la situation décomposée:**

✗ Si l'ordre intervient et si les répétitions sont autorisées, il y a n^d façons de choisir d fois successives un élément parmi n.

✗ Si l'ordre intervient mais que les répétitions ne sont pas autorisées, il y a A_n^d façons de ranger d éléments parmi n.

✗ Si l'ordre n'intervient pas et que le répétitions ne sont pas autorisées, il y a $\binom{n}{d}$ façons de choisir d éléments parmi n.

Exercice 9.3.
On tire successivement, avec remise, 5 boules dans une urne qui en contient 3 noires et 4 blanches. Combien y a-t-il de tirages:
1. en tout?
2. comportant 3 noires et 2 blanches?
3. comportant au plus une noire?
4. comportant au moins deux noires?

2 Espaces probabilisables et probabilisés

2.1 Univers, tribus, évènements

Définition 9.6.
Dans une situation réelle donnée (aussi appelée **épreuve** ou **expérience aléatoire**) on appelle **univers** et l'on note Ω un ensemble fini ou dénombrable dont les éléments représentent toutes les évolutions possibles de l'épreuve considérée. Les éléments $\omega \in \Omega$ sont appelés des **issues**.

L'énoncé d'un exercice de probabilité (c'est à dire d'une expérience aléatoire) ne précise pas (toujours) l'univers Ω explicitement. C'est donc parfois à celui ou celle qui en fait l'étude de *décrire* cet ensemble d'une manière rigoureuse et commode afin de travailler dessus. Cette étape s'appelle la **modélisation** de l'expérience.

Exemple 9.9.

Regardons les univers avec lesquels on peut modéliser les expériences suivantes.

✗ **Expérience 1.** On lance un dé cubique à 6 faces et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure. Les résultats possibles sont alors $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ qui est un ensemble de cardinal 6.

✗ **Expérience 2.** On lance deux dés discernables (un rouge et un bleu par exemple) et on note les résultats obtenus. On voit alors qu'ici $\Omega = \{(i, j) : \ 1 \leq i \leq 6, \ 1 \leq j \leq 6\} = [\![1; 6]\!]^2$, qui est un ensemble à 36 éléments.

✗ **Expérience 3.** Cette fois les deux dés sont identiques, mais on note encore les résultats obtenus. Comme on ne peut plus faire la différence entre les deux dés, les deux résultats de l'expérience précédent $(1; 3)$ et $(3; 1)$ sont en particulier dans cette nouvelle expérience l'expression de la même issue $\{1; 3\}$. Ainsi, on a

$$\Omega = \{\{i, j\} : \ 1 \leq i \leq j \leq 6\}.$$

De plus,

$$\mathrm{Card}(\Omega) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq 6} 1 = \sum_{j=1}^{6} \sum_{i=1}^{j} 1 = \sum_{j=1}^{6} j = \frac{6 \times 7}{2} = 21.$$

☞ En pratique, on ne détaillera pas l'univers Ω dans la plupart des exercices: la modélisation sera implicite.

La définition suivante étend les notions de réunion et d'intersection à un nombre infini dénombrable d'ensembles.

Définition 9.7. **Intersection et union dénombrable**

Soient Ω un univers et $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie ou dénombrable de parties de Ω.

La réunion $\bigcup_{i \in I} A_i$ est définie par

$$\omega \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff \exists i \in I, \omega \in A_i$$

De même, l'intersection $\bigcap_{i \in I} A_i$ est définie par

$$\omega \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff \forall i \in I, \omega \in A_i.$$

Dans un univers infini non dénombrable, toutes les parties ne peuvent pas être considérées comme des évènements (il existe des parties trop *compliquées* pour que, dans certains cas, leur probabilité soit définie...). On a ainsi besoin de définir la notion de **tribu** qui sera *a posteriori* l'ensemble des évènements.

Définition 9.8. **Notion de tribu, espace probabilisable**

Soit Ω un univers.

✗ On appelle **tribu** (ou σ-algèbre) tout sous-ensemble $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant les propriétés suivantes:

i. $\Omega \in \mathcal{T}$;
ii. si $A \in \mathcal{T}$, alors $\overline{A} \in \mathcal{T}$;
iii. pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, on a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.

✗ Si $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω, on dit que $(\Omega, \mathcal{T})$ est un espace probabilisable.

Exemple 9.10.

Si Ω est un univers, $\{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{P}(\Omega)$ sont des tribus.

☞ De même que l'univers, la tribu utilisée n'est en général pas précisée dans l'énoncé.

Définition 9.9. **Évènements**

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable.

✗ On appelle **évènement** de $(\Omega, \mathcal{T})$ toute partie A de Ω telle que $A \in \mathcal{T}$.
✗ On appelle **évènement**[a] **élémentaire** de $(\Omega, \mathcal{T})$ toute partie de Ω de la forme $\{\omega_i\}$ où $\omega_i \in \Omega$.

[a] sous réserve qu'une telle partie soit un évènement... cela dépend de la tribu considérée.

Proposition 9.16.

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. On a les résultats suivants.

i. $\emptyset \in \mathcal{T}$;
ii. si $A, B \in \mathcal{T}$ alors $A \cup B$, $A \cap B$ et $A \setminus B \in \mathcal{T}$;
iii. pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, on a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.

On va donc décrire les *évènements* qui nous intéressent à l'aide des opérations de la théorie des ensembles.

Exemple 9.11.

Le concierge d'un immeuble possède à son trousseau un exemplaire de chacune des clés des appartements de l'immeuble, y compris celle de son domicile. En rentrant d'une soirée arrosée, il ne sait discerner laquelle ouvre sa porte d'entrée. N'ayant pas tous ses moyens, il remet dans le trousseau la clé après l'avoir testée, même si celle-ci n'est clairement pas la bonne. On note S l'évènement correspondant à la découverte de la bonne clé et à l'ouverture de la porte.

S'il est facile de comprendre l'évènement S et de le formuler "oralement", son expression permettant le calcul de la probabilité correspondante n'est pas si simple. Pour décrire précisément la structure de l'évènement, on a besoin d'introduire les évènements (pour $n \geq 1$ entier) A_n : "Le concierge réussit enfin à ouvrir la porte après n tentatives" et B_n : "la $n-$ième clé testée est la bonne". On peut alors écrire les choses comme suit

$$S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^\star} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^\star} \left(\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{B}_k \right) \cap B_n \right).$$

Définition 9.10. **Le langage des probabilités**

Le tableau suivant indique comment traduire en théorie des probabilités le vocabulaire élémentaire de la théorie des ensembles.

Vocabulaire des ensembles	Vocabulaire des probabilités	Notation
la tribu	l'ensemble des évènements	$\mathcal{T}$
la partie pleine de Ω	l'évènement certain	Ω
l'ensemble vide	l'évènement impossible	$\emptyset$
le complémentaire de la partie A dans Ω	l'évènement contraire de A	$\overline{A}$
l'intersection des parties A et B	la conjonction de A et B	$A \cap B$
la réunion des parties A et B	la disjonction de A et B	$A \cup B$
les parties A et B sont disjointes	A et B sont incompatibles	$A \cap B = \emptyset$
la partie A est incluse dans la partie B	la réalisation de A implique celle de B	$A \subset B$

Définition 9.11. **Système complet d'évènements**

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'évènements. On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un **système complet d'évènements** (s.c.e) pour Ω si :

i. $\Omega = \bigcup_{i\in I} A_i$;

ii) $\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.

☞ Étant donnée une expérience, une et une seule partie d'un système complet se réalise.

Exemple 9.12.

✗ Si A est un évènement, alors le système $A, \overline{A}$ est complet.

✗ Si $\Omega = \{\omega_i;\ i \in I\}$, et si les ω_i sont deux à deux distincts, alors le système $(\{\omega_i\})_{i\in I}$ constitué de tous les évènements élémentaires est complet.

2.2 Probabilité sur un espace probabilisable

Définition 9.12. **Probabilité et espace probabilisé**

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. On appelle **mesure de probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{T})$ ou plus simplement **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{T})$ toute application $\mathbf{P} : \mathcal{T} \to [0,1]$ vérifiant les propriétés suivantes.

i. **Probabilité de l'évènement certain.** $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

ii. **Axiome de σ-additivité.** Quelle que soit la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènements (deux à deux) incompatibles, la série $\sum_{n\geq 0} \mathbf{P}(A_n)$ converge et sa somme vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ est alors appelé un **espace probabilisé.**

Jusqu'à la fin de ce chapitre, on fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$.

Remarque 9.2.

Seuls les évènements possèdent une probabilité, pas les parties quelconques de Ω. La probabilité *mesure* les parties qui sont *mesurables*.

Exercice 9.4.

On considère une urne contenant $p \geq 1$ boules noires et une boule blanche. On effectue une infinité de tirages avec remise dans celle-ci.
Pour $n \geq 1$, on dit que l'évènement X_n est réalisé si et seulement si on obtient pour la première fois la boule blanche au n-ième tirage.
Donner la probabilité de X_n, puis la probabilité d'obtenir la boule blanche après un nombre fini de tirage.

Définition 9.13. **Evènement négligeable ou quasi-certain**

✗ Un évènement est dit **négligeable** si sa probabilité vaut 0.

✗ Un évènement est dit **presque sûr** ou **quasi-certain** si sa probabilité vaut 1.

Remarque 9.3.

Attention !
Il ne faut pas confondre l'*évènement impossible* (qui correspond à l'ensemble $\emptyset$) avec un évènement négligeable, et l'*évènement certain* (qui est Ω) avec un évènement presque certain.

Par exemple, dans l'exercice précédent:

- ✗ l'évènement *obtenir la boule blanche en temps fini* est presque certain mais pas certain;
- ✗ l'évènement *ne jamais obtenir la boule blanche* est négligeable mais pas impossible.

Cas d'un univers fini

Si Ω est un univers fini, c'est toujours la tribu $\mathbf{P}(\Omega)$ qui est utilisée. Ainsi toutes les parties de Ω sont des événements, et possèdent donc une probabilité.

Construire une probabilité sur un univers fini $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ revient à associer une probabilité p_i à chaque issue ω_i.

Le réel $p_i \in [0,1]$ sera la probabilité que l'issue ω_i se réalise, et comme Ω décrit l'ensemble des possibilités on a $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

On peut alors définir la probabilité d'un évènement A comme étant la somme des probabilités des issues le constituant, ce qui revient à poser

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\{i \in [\![1,n]\!];\ \omega_i \in A\}} p_i.$$

Le cas particulier suivant est le plus fréquent.

Théorème & Définition 9.16. **Probabilité uniforme sur un univers fini.**

On appelle **probabilité uniforme** sur un univers fini $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ la probabilité $\mathbf{P}$ définie par :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \mathbf{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}.$$

La probabilité d'un évènement est alors donnée par le rapport

$$\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre total de cas}}.$$

En d'autres termes, on a $\mathbf{P}(A) = \dfrac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$ pour tout évènement A.

Remarque 9.4.

Par abus de langage, on emploie parfois la locution *au hasard* pour indiquer que l'univers est muni de la probabilité uniforme.

☞ En général, le lancer d'un dé, d'une pièce de monnaie, ou le choix d'une boule dans une urne sont effectués de manière équiprobable.

Exercice 9.5.

On lance trois fois de suite un dé à six faces. Calculer la probabilité d'obtenir trois fois le chiffre 1.

Remarque 9.5.

Il n'existe pas de probabilité uniforme sur un univers infini dénombrable
Supposons en effet avoir un univers infini dénombrable $\Omega = \{\omega_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ muni d'une probabilité uniforme P. À chacun des évènements élémentaires $\{\omega_n\}$ est alors associée la même probabilité $p \in [0,1]$, ce qui permet d'écrire

$$\mathbf{P}(\Omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(\{\omega_n\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} p = p \sum_{n=0}^{+\infty} 1 = \begin{cases} +\infty & \text{si } p \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Dans les deux cas cela contredit la propriété $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, et termine ainsi la démonstration.

Exercice 9.6.

On tire 4 cartes dans un jeu en contenant 32. Quelle est la probabilité d'avoir exactement un as? Au plus un as? Au moins un as?

2.3 Probabilités et opérations ensemblistes

Étant donné une famille dénombrable d'évènements $(A_i)_{i\in I}$, le symbole $\sum_{i\in I}\mathbf{P}(A_i)$ désignera la somme de la série de terme général $(\mathbf{P}(A_i))_{i\in I}$, sous réserve de convergence.

Proposition 9.17. *σ-additivité finie ou dénombrable*

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'évènements incompatibles. On a $\sum_{i\in I}\mathbf{P}(A_i)=\mathbf{P}\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)$.

Proposition 9.18.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet. On a alors $\sum_{i\in I}\mathbf{P}(A_i)=1$.

Remarque 9.6. *Système quasi-complet d'évènements*

On dit qu'une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'évènements est un système quasi-complet pour Ω si :

i. $\mathbf{P}\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)=1$;
ii. $\forall (i,j)\in I^2,\ i\neq j\Longrightarrow A_i\cap A_j=\emptyset$.

Tous les théorèmes vus dans la suite (en particulier la formule des probabilités totales) utilisant un système complet sont encore vrais avec un système quasi-complet.

On peut redémontrer tous les résultats vus dans le cours de première année, puisque ceux-ci se prouvaient à partir de la formule de σ-additivité finie et de la relation $\mathbf{P}(\Omega)=1$. On y renvoie pour les preuves.

Proposition 9.19.

Soient A,B deux évènements. On a alors les résultats suivants.

i. $\mathbf{P}\left(\overline{A}\right)=1-\mathbf{P}(A)$.
ii. $\mathbf{P}(\emptyset)=0$.
iii. Si $A\subset B$, alors $\mathbf{P}(B\setminus A)=\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(A)$.
iv. Si $A\subset B$, alors $\mathbf{P}(A)\leq\mathbf{P}(B)$ (toute probabilité est une fonction croissante).
v. $\mathbf{P}(A\cup B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(A\cap B)$.

Enfin, la formule des probabilités totales reste vraie dans le cas où le système complet considéré est infini dénombrable.

Théorème 9.20. *Formule des probabilités totales, première version*

Soit B un évènement et $(A_i)_{i\in I}$ un système complet. Alors $\sum_{i\in I}\mathbf{P}(B\cap A_i)$ converge, et on a

$$\mathbf{P}(B)=\sum_{i\in I}\mathbf{P}(B\cap A_i).$$

Le théorème suivant permet enfin de calculer la probabilité d'une réunion dénombrable d'évènements pas nécessairement incompatibles, dans deux cas particuliers.

Définition 9.14. **Monotonie au sens de l'inclusion**

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'évènements.

- ✗ $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **croissante** (au sens de l'inclusion) si $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- ✗ $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **décroissante** (au sens de l'inclusion) si $A_n \supset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 9.21.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'évènements. On a alors les résultats suivants.

i. **Continuité croissante.** Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors la suite $(\mathbf{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

ii. **Continuité décroissante.** Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, alors la suite $(\mathbf{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

iii. **Sous-additivité.** Si la série $\sum_{n\geq 0} \mathbf{P}(A_n)$ converge, alors on a $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)$.

Corollaire 9.22.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'évènements. On a alors les résultats suivants.

i. $\lim_{N\to+\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.

ii. $\lim_{N\to+\infty} \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{N} A_n\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.

Exercice 9.7.

On joue une infinité de fois au loto. Montrer que presque sûrement, on finit par gagner.

3 Indépendance et conditionnement

Définition 9.15. **Indépendance**

Soient A, B deux évènements. On dit que A et B sont **indépendants** si

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

L'indépendance de deux évènements correspond le plus souvent à un choix effectué lors de la modélisation, et n'est alors pas démontrable.
Par exemple, les évènements élémentaires correspondants aux lancers successifs d'une même pièce de monnaie...
Cela correspond parfois à la décision de négliger certains paramètres, afin de simplifier le modèle. Mais dans certains cas, l'indépendance est une conséquence de la modélisation, et c'est le calcul qui permet de la vérifier.

Remarque 9.7.

Attention !
L'indépendance et l'incompatibilité sont deux notions différentes et on fera bien attention à le pas les confondre. Par exemple, dans le cas où $\mathbf{P}(A) \in]0,1[$, les évènements A et Ω sont indépendants mais pas incompatibles, alors que les évènements A et $\overline{A}$ sont incompatibles mais certainement pas indépendants.

Proposition 9.23.

On a alors les résultats suivants.

i. Tout évènement est indépendant de l'évènement impossible $\emptyset$ et de l'évènement certain Ω.
ii. Deux évènements A et B sont indépendants si et seulement si A et $\overline{B}$ le sont.
iii. Soient B un évènement, et $A_1, \dots, A_n$ des évènements deux à deux incompatibles, tels que chacun d'entre eux soit indépendant de B. Alors B est indépendant de $A_1 \cup \cdots \cup A_n$.

Il nous reste encore à définir la notion d'indépendance pour une famille finie d'évènements $A_1, ..., A_m$. Il faut déjà comprendre que l'indépendance deux à deux de ceux-ci ne correspond pas à l'indépendance globale de la famille: on peut imaginer que A_1 ne soit conséquence d'aucun des autres A_i, mais que pourtant la conjonction des $(A_i)_{i>1}$ implique A_1.

Définition 9.16. **Indépendance mutuelle**

Soit $(A_i)_{1\leq i\leq m}$ une famille finie d'évènements.

i. $A_1, \dots, A_m$ sont dits **deux à deux indépendants** si, quels que soient $i, j \in [\![1, m]\!]$:
$$i \neq j \Longrightarrow \mathbf{P}(A_i \cap A_j) = \mathbf{P}(A_i) \times \mathbf{P}(A_j).$$
ii. $A_1, \dots, A_m$ sont dits **mutuellement indépendants** si, quel que soit $k \in [\![1, m]\!]$ et les entiers distincts $i_1, \dots, i_k$ appartenant à $[\![1, m]\!]$:
$$\mathbf{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathbf{P}(A_{i_1}) \times \cdots \times \mathbf{P}(A_{i_k}).$$

Remarque 9.8.

On obtient par exemple que trois évènements A, B, C sont mutuellement indépendants si: $\mathbf{P}(A\cap B)=\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$, $\mathbf{P}(A\cap C)=\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(C)$, $\mathbf{P}(B\cap C)=\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$ **et** $\mathbf{P}(A\cap B\cap C)=\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$.

L'exercice ci-dessous montre que l'indépendance mutuelle est une notion plus forte que l'indépendance deux à deux.

Exercice 9.8.

On lance deux fois de suite une pièce équilibrée. On considère les évènements A "le premier lancer donne *Pile*", B "le second lancer donne *Pile* et C "les deux lancers donnent le même résultat".
Montrer que ces trois évènements sont deux à deux indépendants, mais pas mutuellement indépendants.

Théorème 9.24.

Soit une famille finie d'évènements $(A_i)_{i\in I}$. On définit une famille $(B_i)_{i\in I}$ en posant $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$ pour tout $i \in I$. Alors $(A_i)_{i\in I}$ est mutuellement indépendante si et seulement si $(B_i)_{i\in I}$ l'est.

☞ Par abus de langage, on dira parfois des évènements d'une famille qu'ils sont *indépendants* au lieu de mutuellement indépendants. Mais dans le cas de l'indépendance deux-à-deux, il faudra toujours préciser pour éviter les confusions.

3.1 Probabilités conditionnelles

Définition 9.17. **Probabilité conditionnelle**

Soit A un évènement non négligeable. Pour tout évènement B, on appelle **probabilité conditionnelle de B sachant** A le réel noté $\mathbf{P}(B|A)$ ou $\mathbf{P}_A(B)$ défini par
$$\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Proposition 9.25.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, et A un évènement non négligeable. L'application $\mathbf{P}_A : \mathcal{T} \to [0, 1], B \mapsto \mathbf{P}_A(B)$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

Remarque 9.9.

Attention !
Écrire (ou même penser) que $B|A$ (ou parler de l'évènement B sachant A) est un évènement n'a aucun sens. L'écriture $\mathbf{P}(B|A)$ est une notation, notamment pratique lorsque l'évènement A est lourd à écrire en indice de $\mathbf{P}$ ce qui rendrait peu lisible la quantité considérée.

En pratique, on est souvent amené à considérer des *processus aléatoires*, c'est-à-dire des successions complexes d'étapes aléatoires plus simples (ces processus sont alors représentés par des arbres). Pour modéliser globalement un tel phénomène, on peut utiliser la notion de probabilité conditionnelle afin d'étudier l'interaction entre deux expériences successives.

Proposition 9.26.
Soient A, B deux évènements non négligeables. Alors $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}_B(A)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}_A(B)\mathbf{P}(A)$.

Preuve. Résulte trivialement de la définition de la probabilité conditionnelle. □

Proposition 9.27.
Soient A, B deux évènements non négligeables. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

i. A et B sont indépendants.
ii. $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A)$.
iii. $\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B)$.

3.2 Formule des probabilités totales

On peut donner la seconde expression de la formule des probabilités totales. Celle-ci est fondamentale.

Théorème 9.28. **Formule des probabilités totales, seconde version**
Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènements non négligeables, et B un évènement. Alors $\sum_{i\in I} \mathbf{P}_{A_i}(B)\mathbf{P}(A_i)$ converge, et on a

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbf{P}_{A_i}(B)\mathbf{P}(A_i).$$

Preuve. Se déduit directement de la première version de la formule des probabilités totales, couplée avec la définition d'une probabilité conditionnelle. □

Remarque 9.10.
Dans le cas d'un système complet quelconque $(A_i)_{i\in I}$, on pose $\mathbf{P}(B|A_i)\mathbf{P}(A_i) = 0$ dès que $\mathbf{P}(A_i) = 0$, pour tout évènement B. On vérifie alors aisément que la formule ci-dessus reste valable avec cette convention, ce qui en pratique permet de l'appliquer sans avoir à vérifier l'hypothèse que les évènements du système complet sont non négligeables.

Exercice 9.9.
On dispose de deux pièces de monnaie: l'une d'entre elles est équilibrée, et l'autre possède deux côtés face. On choisit au hasard l'une des deux pièces, puis on la jette. Quelle est la probabilité d'obtenir *Pile*?

Exercice 9.10.
On lance une pièce de monnaie équilibrée jusqu'à apparition du premier *Pile*. On sait qu'un *Pile* apparait presque sûrement. Si le premier *Pile* apparaît avec le $k-$ième lancer, on remplit une urne de k boules numérotées de 1 à k, et on pioche alors une boule dans cette urne. Pour $j \in \mathbb{N}^*$, quelle est la probabilité de piocher une boule avec le numéro j ?

3.3 Formule de Bayes

Il est des situations dans lesquelles on peut avoir besoin d'inverser le conditionnement. Si on lance deux pièces dont une est truquée (et dont on connait les paramètres), il est facile de connaitre la probabilité d'obtenir telle ou telle face sachant la pièce qu'on lance.
Mais on pourrait vouloir connaître la probabilité d'avoir lancé une pièce truquée sachant ce qu'on a obtenu comme face.

Théorème 9.29. **Formule de Bayes ou formule de probabilité des causes**

Soient A, B deux évènements non négligeables. On a

$$\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}_A(B)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Preuve. Trivial. □

Exemple 9.13.

La formule de Bayes est d'une grande importance pratique. Pour déterminer par l'exemple l'efficacité d'un vaccin, il faut déterminer la probabilité $\mathbf{P}\left(\text{être infecté}\middle|\,\text{être vacciné}\right)$. Mais on ne peut *a priori* pas déterminer cette probabilité expérimentalement (à moins d'inoculer volontairement la maladie à des personnes vaccinées!).
Par contre on peut aisément déterminer une valeur approchée de la probabilité $\mathbf{P}\left(\text{être vacciné}\middle|\,\text{être infecté}\right)$: il suffit pour cela, après avoir vacciné la population, d'effectuer un sondage dans un hôpital, et de déterminer parmi les patients infectés la proportion de ceux qui avaient été vaccinés. On déduit alors de la formule de Bayes une valeur approchée de $\mathbf{P}\left(\text{être infecté}\middle|\,\text{être vacciné}\right)$.

Théorème 9.30. **Formule de Bayes ou formule de probabilité des causes, seconde version**

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènements non négligeables, et B un évènement non négligeable. Alors pour tout $k \in I$, on a

$$\mathbf{P}_B(A_k) = \frac{P_{A_k}(B)P(A_k)}{\sum_{i\in I}\mathbf{P}_{A_i}(B)\mathbf{P}(A_i)}.$$

Preuve. Se déduit de la formule précédente, en utilisant la formule des probabilités totales pour calculer $\mathbf{P}(B)$. □

Exercice 9.11. **Le paradoxe des maladies rares**

Vous êtes directeur de cabinet du ministre de la santé. Une maladie est présente dans la population avec la proportion d'une personne malade sur 10000. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage: si une personne est malade, le test est positif à 99%. Si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0,1%.

Que penser de ce test?

Exercice 9.12.

On reprend l'expérience de l'**Exercice 9. 9**. On suppose que le lancer a donné face ; quelle est la probabilité que ce soit la pièce équilibrée qui a été lancée?

3.4 Formule des probabilités composées

Les probabilités conditionnelles permettent de calculer la probabilité d'une suite d'évènements décroissants, connaissant la probabilité de chacun sachant les précédents.

Théorème 9.31. **Formules des probabilités composées**

Soient $n \geq 2$ évènements $A_1, \dots, A_n$ non négligeables.

i. Si $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ est décroissante, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_n) &= \left(\prod_{i=1}^{n-1} \mathbf{P}(A_{i+1}|A_i)\right) \times \mathbf{P}(A_1) \\ &= \mathbf{P}(A_n|A_{n-1})\mathbf{P}(A_{n-1}|A_{n-2}) \cdots \mathbf{P}(A_2|A_1)\mathbf{P}(A_1)\end{aligned}$$

ii. Dans le cas général, on a

$$\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \left(\prod_{i=1}^{n-1} \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{i+1} A_k \middle| \bigcap_{k=1}^{i} A_k\right)\right) \times \mathbf{P}(A_1) = \left(\prod_{i=1}^{n-1} \mathbf{P}\left(A_{i+1} \middle| \bigcap_{k=1}^{i} A_k\right)\right) \times \mathbf{P}(A_1)$$

$$= \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\mathbf{P}_{A_1\cap A_2}(A_3) \times \ldots \times \mathbf{P}\left(A_n \middle| \bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right)$$

☞ On utilise cette formule (notamment celle du *ii.* pour calculer la probabilité d'une intersection d'évènements non indépendants.

Exercice 9.13.

On considère une urne contenant une boule blanche et deux boules noires. On y effectue des tirages selon le protocole suivant: si l'on tire la boule blanche, la partie s'arrête; si l'on tire une boule noire, on remet celle-ci dans l'urne ainsi qu'une seconde boule noire (avant le tirage suivant).

1. Soit N_k l'évènement "obtenir une boule noire au k-ième tirage". Les évènements N_k, N_{k+1} sont-ils indépendants?
2. Soit $k \geq 2$. Montrer que $(N_i)_{1\leq i\leq k}$ est décroissante. En déduire $\mathbf{P}(N_k)$.
3. Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête pas?

Exercice 9.14.

Une galette des rois est découpées en N parts; une seule contient la fève et les $N-1$ autres rien du tout que du beurre et du gras. On distribue les N parts successivement aux N convives qui font la queue pour êtres servi.e.s.
Montrer qu'une fois positionnées dans la queue, toutes les personnes gourmandes de ce groupe ont la même probabilité d'obtenir la fève.

4 Notion de variable aléatoire discrète

Dans la fin de ce chapitre nous étudions les applications définies sur un espace probabilisé dénombrable $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$, c'est-à-dire des quantités dont la valeur dépend de l'issue d'une expérience aléatoire. Contrairement a ce qui avait été fait en première année, on ne se limite donc plus au cas des variables aléatoires dont l'ensemble des valeurs possibles est fini.

De même que précédemment, on étudiera des phénomènes aléatoires sans décrire précisément l'espace probabilisé associé: la donnée *a priori* des probabilités des évènements considérés suffit, celles-ci étant données sous forme de loi d'une variable aléatoire.

Dans toute la suite, I désigne (sauf mention du contraire) une partie de $\mathbb{N}$, finie ou non. Tout ensemble de la forme $\{x_i : i \in I\}$ est alors fini ou dénombrable.
De même, toute famille de la forme $(x_i)_{i\in I}$ est finie ou dénombrable.

On admet qu'il existe une tribu, que l'on notera $\mathcal{B}$, sur $\mathbb{R}$ contenant tous les intervalles, appelée *tribu des boréliens*.

4.1 Définition et premières propriétés

Définition 9.18. **Variable aléatoire discrète**

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable, E un ensemble, et une application $X : \Omega \to E$. On dit que X est une **variable aléatoire discrète** si, pour tout $x \in E$, on a $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{T}$ (*i.e.* si $X^{-1}(\{x\})$ est un évènement).
L'image $X(\Omega)$ de X sera appelée l'**univers image** de X ou l'ensemble des valeurs possibles de X.

Remarque 9.11. **Variable aléatoire discrète ou finie**

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$.

- ✗ Si $X(\Omega)$ est un ensemble fini $\{x_1, \dots, x_n\}$, on dit que X est une **variable aléatoire (discrète) finie**. Si l'univers Ω est fini, alors $X(\Omega)$ l'est également.
- ✗ Si $X(\Omega)$ est un ensemble infini dénombrable $\{x_i |\ i \in I\}$, on dit que X est une variable aléatoire **discrète infinie dénombrable**.

Exemple 9.14.

Une urne contient des boules numérotées de 1 à n.

- ✗ On pioche une boule au hasard dans cette urne et on note X la variable aléatoire qui prend la valeur du numéro de la boule piochée. On a alors $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et X est une variable aléatoire finie.
- ✗ On considère la variable aléatoire Y qui prend la valeur 1 si et seulement si la boule piochée a un numéro pair et 0 sinon. Dans ce cas, $Y(\Omega) = \{0, 1\}$ et Y est encore une variable aléatoire finie.
- ✗ On pioche maintenant successivement et avec remise jusqu'à obtenir la boule numérotée 1 et on note Z la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de pioches effectuées. On peut avoir la boule 1 dès la première pioche, mais on peut piocher arbitrairement longtemps une autre boule donc ici $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et cette fois Z est une variable aléatoire infinie dénombrable.

Définition 9.19. **Notations des évènements**

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable, $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire, et $k \in E$.

- ✗ L'évènement $X^{-1}(\{k\}) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = k\}$ sera noté $[X = k]$.
- ✗ Si $E \subset \mathbb{R}$, on pose encore:
  - l'évènement $X^{-1}(]-\infty, k]) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \leq k\}$ sera noté $[X \leq k]$;
  - l'évènement $X^{-1}(]-\infty, k[) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) < k\}$ sera noté $[X < k]$.

  On définit de même les évènements $[X \geq k]$ et $[X > k]$.

Proposition 9.32. **Système complet canonique associé à une variable aléatoire**

Soient $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable, et $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire discrète dont l'univers image est $X(\Omega) = \{x_i |\ i \in I\}$. Alors la famille $(X = x_i)_{i \in I}$ est un système complet d'évènements pour Ω.

Cette dernière proposition est importante, car elle permet d'appliquer la formule des probabilités totales en *découpant* l'univers selon les valeurs que prend une variable aléatoire.

Exercice 9.15.

Une urne contient des boules, indiscernables au toucher, numérotées de 1 à n. On pioche successivement et avec remise des boules dans cette urne. On introduit la variable aléatoire X qui prend pour valeur le rang du premier tirage qui permet d'obtenir une boule avec un numéro supérieur ou égal au numéro de la boule piochée au premier au tirage.

1. Que vaut $X(\Omega)$?

2. Déterminer, pour tout $k \in X(\Omega)$, la probabilité $P([X = k])$.

Jusqu'à la fin de ce chapitre, on fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$. Sauf mention du contraire, toutes les variables aléatoires considérées seront discrètes, définies sur $(\Omega, \mathcal{T})$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque 9.12.

Par σ-additivité, on déduit alors, de la proposition précédente, $\mathbf{P}\left(\bigcup_{i \in I} [X = x_i]\right) = \sum_{i \in I} \mathbf{P}(X = x_i) = 1$.

Grâce à la probabilité donnée sur Ω, on peut définir la *loi* d'une variable aléatoire X, qui consiste à associer à chaque valeur que X peut prendre la probabilité que cette valeur soit prise.

Théorème & Définition 9.32. **Loi d'une variable aléatoire**

Soient X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{x_i : i \in I\}$ et $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ la tribu des boréliens. Alors, l'application définie par

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{P}_X : & \mathcal{B} & \longrightarrow & [0,1] \\ & A & \longmapsto & \mathbf{P}(X \in A) \end{array}$$

est une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, appelée **loi** de X.

Théorème & Définition 9.32. **Loi et distribution de probabilité**

Soit $\{x_i : i \in I\}$ un ensemble dénombrable de réels.
Une application

$$\begin{array}{ccc} \{x_i : i \in I\} & \to & \mathbb{R} \\ x_i & \mapsto & p_i \end{array}$$

est une **distribution de probabilité** si :

$$\forall i \in I,\ p_i \in [0,1] \qquad \text{et} \qquad \sum_{i \in I} p_i = 1.$$

On peut alors lui associer, de manière unique, une loi de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ en posant

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{P} : & \mathcal{B} & \longrightarrow & [0,1] \\ & A & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i:\ x_i \in A} p_i \end{array}$$

Plus précisément, il existe une variable aléatoire X telle que $\mathbf{P}_X = \mathbf{P}$, c'est à dire telle que, pour tout $i \in I$, $\mathbf{P}([X = x_i]) = p_i$.

Méthode 9.1. **Déterminer la loi d'une v.a. discrète**

L'application $\mathbf{P}_X$ associe donc à un évènement la probabilité que X y prenne ses valeurs. Si bien entendu la définition de la loi est celle ci-dessus, ce n'est pas exactement cela qu'on va manipuler, mais plutôt la *distribution* des probabilités $x \in X(\Omega) \mapsto \mathbf{P}(X = x)$.

En effet, dans le cas d'un univers Ω discret (fini ou infini), la loi d'une variable aléatoire sera entièrement déterminée (comme le précise le **Théorème 9.3** ci-dessus) par la donnée de l'application

$$x \in X(\Omega) \mapsto \mathbf{P}(X = x).$$

Ainsi, pour déterminer la loi d'une variable aléatoire, on cherche, pour chacun des éléments de son univers image, la probabilité que la variable aléatoire prenne cette valeur là.

La loi sera la principale information dont on disposera sur une variable aléatoire, l'univers Ω étant le plus souvent implicite et non précisé.

On peut représenter une loi par un histogramme ou un diagramme en bâtons: la hauteur du bâton d'abscisse x_n est alors la probabilité que X prenne la valeur x_n.
Si $x_n \notin X(\Omega)$, alors $\mathbf{P}(X = x_n) = 0$.

Remarque 9.13. **Variables aléatoires de même loi**

Il est erroné de penser que deux variables aléatoires qui possèdent la même loi sont égales.
Si on lance deux dés équilibrés, ils ne vont pas forcément tomber sur la même face et pourtant, les variables aléatoires qui prennent pour valeur le résultat de chacune des deux faces suivent bien la même loi (elles prennent les valeurs avec la même probabilité 1/6).

Lorsque deux variables aléatoires X et Y *suivent* la même loi, c'est à dire lorsque $\mathbf{P}_X = \mathbf{P}_Y$ (ou plus simplement qu'elles ont la même distribution de probabilité) on écrira

$$X \sim Y.$$

Ce théorème permet en particulier de définir une variable aléatoire directement par sa distribution de probabilités, sans définir formellement l'univers ni les évènements associés.

Exercice 9.16.

On considère la suite (u_k) définie par

$$\forall k \geq 2, \qquad u_k = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Montrer qu'il existe une variable aléatoire X telle que, pour tout $k \geq 2$, $\mathbf{P}(X = k) = u_k$.

Définition 9.20. **Fonction de répartition**

Soit X une variable aléatoire. On appelle **fonction de répartition** de X la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad F_X(t) = \mathbf{P}(X \leq t).$$

Proposition 9.33. **Calcul de la fonction de répartition**

Soit X une variable aléatoire. Alors,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad F_X(t) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \leq t}} \mathbf{P}(X = x).$$

Remarque 9.14.

On observe que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $[X = k] \cup [X \leq k-1] = [X \leq k]$ et que l'union est disjointe. Il suit que

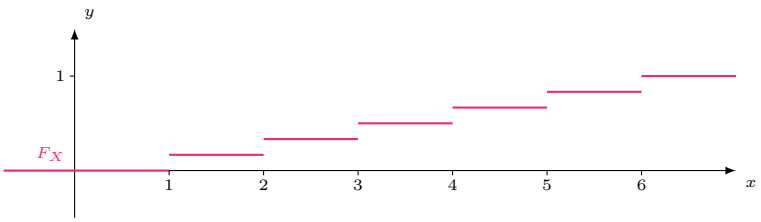
$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad F_X(k) - F_X(k-1) = \mathbf{P}(X = k).$$

☞ On se sert souvent de la fonction de répartition pour calculer la loi du max (ou du min, en passant aux évènements contraires) de plusieurs variables aléatoires *indépendantes*.

Exemple 9.15. **Fonction de répartition d'une loi uniforme**

Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le résultat de lancer d'un dé équilibré à six faces. Alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_X(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{\lfloor t \rfloor}{6}, & \text{si } t \leq 6 \\ 1, & \text{si } t > 6 \end{cases}$$



Proposition 9.34.

Deux variables aléatoires X et Y suivent la même loi si et seulement si elles ont la même fonction de répartition.

5 Lois usuelles discrètes

5.1 Loi certaine

Une variable aléatoire sera dite certaine si elle prend toujours la même valeur avec une probabilité 1.

Définition 9.21. **Variable aléatoire certaine**

Soit X une variable aléatoire. On dit que X est **certaine** s'il existe a tel que $\mathbf{P}(X = a) = 1$.

5.2 Loi uniforme

La loi uniforme est celle des variables aléatoires **finies** qui prennent leurs différentes valeurs de manière équiprobable.

Définition 9.22. **Loi uniforme**

Soit X une variable aléatoire finie telle que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. On dit que X suit une **loi uniforme** sur $\{x_1, \ldots, x_n\}$, ce qui sera noté $X \sim \mathcal{U}(\{x_1, \ldots, x_n\})$, si

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \ \mathbf{P}(X = x_i) = \frac{1}{n}.$$

Remarque 9.15.
Dans le cas où $X(\Omega) = \mathbb{N}$, dire que X suit une loi uniforme est absurde (car il n'existe pas de probabilité uniforme sur un ensemble infini).

Exemple 9.16.
Une variable aléatoire donnant le résultat du lancer d'un dé équilibré suit la loi $\mathcal{U}[\![1,6]\!]$.

Avec Python.
La commande `randint(a,b)` (du package `numpy.random`) renvoie une simulation de la loi $\mathcal{U}([\![a, b-1]\!])$.

5.3 Loi de Bernoulli

La loi de Bernoulli intervient à chaque fois qu'il est question d'expérience aléatoire à deux alternatives possibles (souvent appelées succès et échec).

Définition 9.23. **Loi de Bernoulli**
Soit $p \in [0,1]$, et X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{0,1\}$. On dit que X suit une **loi de Bernoulli** de paramètre p, ce qui sera noté $X \sim \mathcal{B}(1,p)$ ou simplement $X \sim \mathcal{B}(p)$, si

$$\mathbf{P}(X=1) = p \qquad \text{et} \qquad \mathbf{P}(X=0) = 1-p.$$

Exemple 9.17.
On considère la variable aléatoire qui donne le résultat du lancer d'une pièce de monnaie truquée. Celle-ci suit alors la loi $\mathcal{B}(1,p)$, pour un certain réel p, égal à la probabilité d'obtenir *Pile* (ou *Face*).

Un autre exemple très utilisé de loi de Bernoulli est celui des variables indicatrices (voir **Exercice 9.??**).

5.4 Loi binomiale

Théorème & Définition 9.34. **Loi Binomiale**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0,1]$, et X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$. On dit que X suit une **loi binomiale de paramètres** n, p, ce qui sera noté $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, si :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbf{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Preuve. La formule du binôme garantit que la formule ci-dessus définit bien une distribution de probabilités. □

Proposition 9.35. **Nombre de succès**
Lorsqu'on répète n fois, de façon indépendante, la même expérience de Bernoulli de paramètre p (disons que p est la probabilité d'un succès), alors la variable aléatoire qui prend la valeur du *nombre de succès* suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$.

Exemple 9.18.
On considère une urne contenant des boules, parmi lesquelles il y a une proportion $p \in [0,1]$ de boules blanches, et une proportion $1-p$ de boules noires. On effectue n tirages avec remise dans cette urne, et on appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de boules blanches obtenues.
Alors $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

Remarque 9.16.
Une loi de Bernoulli de paramètre p est une loi binomiale de paramètres $1, p$, d'où la notation de la loi de Bernoulli.

Avec Python.
La commande `binomial(n,p)` (du package `numpy.random`) renvoie une simulation de la loi $\mathcal{B}(n,p)$.

5.5 Loi géométrique

Théorème & Définition 9.35. **Loi géométrique**

Soit $p \in [0,1]$. On dit que X suit **la loi géométrique** de paramètre p, ce qui se note $X \sim \mathcal{G}(p)$, si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et si

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

Exercice 9.17.

Démontrer que la formule ci-dessus définit bien une loi de probabilité.

Proposition 9.36. **Temps d'attente du premier succès**

Lorsqu'on répète, de façon indépendante, la même expérience de Bernoulli de paramètre p (disons que p est la probabilité d'un succès) jusqu'à l'obtention d'un succès, alors la variable aléatoire qui prend la valeur du *nombre d'itérations* (ou du rang du premier succès) suit la loi $\mathcal{G}(p)$.

Exemple 9.19.

On lance une infinité de fois un dé équilibré et on note X la variable aléatoire qui prend la valeur du numéro du lancer où apparait, pour la première fois, la face numérotée "6". Alors $X \sim \mathcal{G}(1/6)$.

Exercice 9.18.

Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X > k)$.

Exercice 9.19. **Coïncidence de lois géométriques indépendantes**

On considère deux lois géométriques de même paramètre p supposées *indépendantes* (on renvoie à la **Définition 9.27**). Déterminer $\mathbf{P}(X = Y)$.

Exercice 9.20. **Minimum de deux lois géométriques indépendantes**

On considère deux lois géométriques de même paramètre p supposées *indépendantes*.
Déterminer la loi de $Z = \min(X, Y)$.

Avec Python .

La commande `geometric(p)` (du package `numpy.random`) renvoie une simulation de la loi $\mathcal{G}(p)$.

5.6 Loi de Poisson

Théorème & Définition 9.36. **Loi de Poisson**

Soit $\lambda > 0$. On dit que X suit **loi de Poisson** de paramètre λ, ce qui se note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et si

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Exercice 9.21.

Démontrer que la formule ci-dessus définit bien une loi de probabilité.

Remarque 9.17.

La loi de Poisson est aussi appelée *loi des évènements rares*, parce que $P(X = k)$ décroît très vite vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$. Contrairement aux lois binomiale ou géométrique, on ne peut pas associer une loi de Poisson à la description d'une expérience aléatoire usuelle.
On s'en sert (et c'est dans ce cas une hypothèse faite *a priori*) pour modéliser des évènements associés à des prises de valeurs arbitrairement grandes mais dont la probabilité décroît très vite : nombre de voiture passant à un péage, nombre d'appels dans un standard téléphonique, apparition d'une mutation génétique chez un sujet...

Exercice 9.22. **Stabilité par somme des lois de Poisson**

Soient X et Y deux variables aléatoires *indépendantes* suivant toutes deux des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.
Montrer que

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu).$$

6 Loi conditionnelle

Définition 9.24. **Loi conditionnelle**

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{x_i : i \in I\}$. Soient encore A un évènement non négligeable, et $\mathbf{P}_A$ la probabilité conditionnelle sachant A.
On appelle **loi conditionnelle de X sachant A** la loi de X relativement à l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P}_A)$, c'est-à-dire celle associée à la distribution de probabilités

$$\begin{array}{ccc} \{x_i : i \in I\} & \to & [0,1] \\ x_i & \mapsto & \mathbf{P}_A(X = x_i) \end{array}$$

Exercice 9.23.

On lance une pièce donnant pile avec probabilité $p \in]0;1[$. On note X le rang d'apparition du premier pile et si $[X = n]$, on note Y le nombre de faces obtenus lors de n lancers supplémentaires.

1. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$.
2. Préciser $Y(\Omega)$ puis montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(Y = k) = \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (pq)^n.$$

Exercice 9.24. **Binomiale conditionnée par une Poisson**

Un auto-stoppeur attend au péage d'une autoroute pendant une certaine période. On suppose que le nombre de véhicules franchisant le péage pendant cette période est modélisé par une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. A chaque fois qu'un véhicule franchit le péage, il lance une pièce truquée qui donne pile avec la probabilité p. On pose $q = 1 - p$.
On note N, X et Y respectivement le nombre de lancers, le nombre de piles obtenus et le nombre de face obtenus.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[N = n]$.
2. Montrer que X suit une loi de Poisson de paramètre λp.
3. Sans calcul, que peut-on dire de la loi de Y ?

7 Loi d'une composée $\varphi(X)$

Soit X une variable aléatoire réelle, et une fonction φ à valeurs réelles définie sur $X(\Omega)$. Alors l'application $\varphi \circ X : \Omega \to \mathbb{R}$ sera notée $\varphi(X)$.

Remarque 9.18.

On exprime ici le fait que, considérant une variable aléatoire donnée par sa loi, on peut *oublier* l'espace probabilisé sous-jacent et considérer X comme une variable! Mais cette notation n'est valable que dans le cadre des variables aléatoires: la composée $f \circ g$ de deux applications ne se note pas $f(g)$ en général!

Nous allons montrer que, si X est une variable aléatoire, on peut exprimer la loi de $\varphi(X)$ en fonction de celle de X. On commence par donner un exemple représentatif.

Exercice 9.25.

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et φ la fonction définie par $\varphi(x) = \cos(\pi x)$. Déterminer la loi de $\varphi(X)$.

Plus généralement, on a le résultat ci-dessous, basé sur le principe suivant: $\varphi(X) = y$ si et seulement si X prend une des valeurs x_i que φ envoie sur y.

Proposition 9.37.

Soit X une variable aléatoire, et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $X(\Omega)$.
Si $\varphi(X)$ est une variable aléatoire, alors son univers image est $\varphi(X(\Omega))$, et sa loi est donnée par :

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbf{P}(Y = y) = \mathbf{P}(\varphi(X) = y) = \sum_{x \in X(\Omega):\ \varphi(x) = y} \mathbf{P}(X = x).$$

Exemple 9.20.

Si $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$, alors $\mathbf{P}(X^2 = 0) = \mathbf{P}(X = 0)$ et $\mathbf{P}(X^2 = 1) = \mathbf{P}(X = -1) + \mathbf{P}(X = 1)$.

Théorème 9.38.

Soient X, Y deux variables aléatoires, et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $X(\Omega)$. Si $X \sim Y$, alors $\varphi(X) \sim \varphi(Y)$.

8 Couples de variables aléatoires. Loi conjointe

8.1 Généralités

On admet qu'il existe une tribu, notée $\mathcal{B}_2$, sur $\mathbb{R}^2$, qui contient toutes les *boules ouvertes*. Elle contient en particulier tous les *rectangles* (produits cartésiens d'intervalles).

Définition 9.25.

On appelle **couple de variables aléatoires** toute fonction $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$, où X, Y sont deux variables aléatoires réelles.
On appelle alors **loi (conjointe)** du couple (X, Y) l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_2 & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & \mathbf{P}((X,Y) \in A) \end{array}$$

Remarque 9.19.

Un couple de variable aléatoire discrètes est en fait une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

La probabilité $\mathbf{P}(X = x_i \cap Y = y_j)$ sera notée $\mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j)$.

Méthode 9.2. **Déterminer la oi d'un couple**

✗ Tout comme pour la loi d'une (seule) variable aléatoire, on détermine la loi d'un couple aléatoire en déterminant l'ensemble de ses valeurs possibles $(X, Y)(\Omega)$, puis on calcule $\mathbf{P}(X = x, Y = y)$ pour tout $(x, y) \in (X, Y)(\Omega)$.

La loi conjointe du couple (X, Y) est déterminée par l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{X,Y} : & X(\Omega) \times Y(\Omega) & \to & [0;1] \\ & (i,j) & \mapsto & \mathbf{P}\left(X = i,\ Y = j\right). \end{array}$$

✗ On observera que $(X, Y)(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$ mais qu'il n'y a pas nécessairement égalité.

✗ On ne cherchera (donc) pas systématiquement à déterminer l'ensemble des valeurs possibles de (X, Y): on pourra se contenter de donner $\mathbf{P}(X = x, Y = y)$ pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Exercice 9.26.

Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3. On tire successivement et sans remise deux boules dans cette urne et on note X le numéro de la première boule et Y le numéro de la deuxième boule.

Déterminer la loi conjointe de (X, Y).

Exercice 9.27.

On lance une pièce qui, à chaque lancer, donne *Pile* avec probabilité p et *Face* avec probabilité $q = 1-p$ (avec $p \in]0;1[$). On note X le rang d'apparition du premier *Pile*, Y le rang d'apparition du premier *Face* et Z le rang d'apparition du second *Pile*.

1. Déterminer la loi conjointe de (X, Z).
2. Déterminer la loi conjointe de (X, Y).

Proposition 9.39.

On a :

$$\sum_{i\in X(\Omega)}\sum_{j\in Y(\Omega)} \mathbf{P}\left([X=i]\cap[Y=j]\right) = \sum_{j\in Y(\Omega)}\sum_{i\in X(\Omega)} \mathbf{P}\left([X=i]\cap[Y=j]\right) = 1.$$

Dans la suite de cette section, J désigne une partie de $\mathbb{N}$.

Définition 9.26. **Lois marginales**

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires tel que $X(\Omega) = \{x_i : \ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j : \ \ j \in J\}$. On appelle **lois marginales** du couple (X,Y) les lois des variables aléatoires X et Y.

Méthode 9.3. **Déterminer les lois marginales**

Déterminer les lois marginales du coupe (X,Y), c'est déterminer les applications

$$\begin{array}{ccc} X(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ x_i & \mapsto & \mathbf{P}(X=x_i) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} Y(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ y_j & \mapsto & \mathbf{P}(Y=y_j) \end{array}$$

Pour ce faire, on utilise la **formule des probabilités totales**. Plus précisément,

✗ On obtient la loi de X grâce à la formule des probabilités totales avec le s.c.e $\{[Y=y_j] : j \in J\}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left([X=x_i]\right) &= \sum_{j\in J} \mathbf{P}\left(X=x_i,\ Y=y_j\right) \\ &= \sum_{j\in J} \mathbf{P}([Y=y_j]) P_{[Y=y_j]}([X=x_i]) \end{aligned}$$

✗ On obtient la loi de Y grâce à la formule des probabilités totales avec le s.c.e $\{[X=x_i] : i \in I\}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left([Y=y_j]\right) &= \sum_{i\in I} \mathbf{P}\left(X=x_i,\ Y=y_j\right) \\ &= \sum_{i\in I} \mathbf{P}([X=x_i]) P_{[X=x_i]}([Y=y_j]) \end{aligned}$$

Si la loi du couple est résumée dans un tableau à double entrée, les lois marginales s'obtiennent en sommant les éléments de chaque ligne et de chaque colonne.

Remarque 9.20.

Si on peut déduire les lois marginales à partir de la loi conjointe, on ne peut pas déduire la loi conjointe d'un couple en fonction des lois marginales: il y a en effet dans un couple une troisième information, qui consiste en l'interaction entre les deux variables le composant.
En d'autres termes : X_1 peut avoir la même loi que X_2 et Y_1 avoir la même loi que Y_2 sans que les couples (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) aient la même loi.

8.2 Notion d'indépendance

Définition 9.27. **Variables aléatoires indépendantes**

Soient X, Y deux variables aléatoires. On dit que X et Y sont **indépendantes**, et on note $X \perp\!\!\!\perp Y$ si, quel que soit $(A,B) \in \mathcal{P}\left(X(\Omega)\right) \times \mathcal{P}\left(Y(\Omega)\right)$, les évènements $[X \in A]$ et $[Y \in B]$ sont indépendants.

Remarque 9.21.

✗ Dans le cas de deux variables aléatoires indépendantes X et Y, la donnée de la loi du couple (X,Y) est donc équivalente à la donnée des lois de X et de Y.
✗ L'indépendance de deux variables aléatoires ne présage en rien de leur loi. En particulier, deux variables aléatoires peuvent être indépendantes et avoir même loi.

En pratique, c'est toujours la caractérisation suivante que l'on utilise.

Proposition 9.40. **Caractérisation de l'indépendance de deux v.a.d**

Soient X,Y deux variables aléatoires. Alors X et Y sont indépendantes si et seulement si, quel que soit $(x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega)$, les évènements $[X=x]$ et $[Y=y]$ sont indépendants. Soit:

$$X \perp\!\!\!\perp Y \iff \forall (x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega),\ \mathbf{P}(X=x,Y=y)=\mathbf{P}(X=x)\mathbf{P}(Y=y).$$

La notion d'indépendance s'étend à un nombre quelconque de variables aléatoires, en considérant des évènements mutuellement indépendants.

Définition 9.28.

Soit $(X_i)_{1\leq i\leq m}$ une famille finie de variables aléatoires. Celles-ci sont dites **mutuellement indépendantes** si, quel que soit $k\in[\![1,m]\!]$, les entiers distincts $i_1,\dots,i_k$ appartenant à $[\![1,m]\!]$, et $(A_1,\dots,A_k)\in\prod_{j=1}^{k}\mathcal{P}\left(X_{i_j}(\Omega)\right)$ on a:

$$\mathbf{P}(X_{i_1}\in A_1,\dots,X_{i_k}\in A_k)=\mathbf{P}(X_{i_1}\in A_1)\times\cdots\times\mathbf{P}(X_{i_k}\in A_k).$$

Remarque 9.22.

✗ $X_1,\dots,X_m$ sont mutuellement indépendantes si et seulement si quel que soit $(A_1,\dots,A_m)\in\prod_{j=1}^{m}\mathcal{P}\left(X_j(\Omega)\right)$, les évènements $X_1\in A_1,\dots,X_m\in A_m$ sont mutuellement indépendants.

✗ Cette définition s'étend aux familles infinies dénombrables, qui sont dites mutuellement indépendantes si toute sous-famille finie est mutuellement indépendante.

✗ Une suite (X_i) de variables aléatoires (mutuellement) indépendantes de même loi est appelée une suite de *variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées*, abrégé en *v.a.i.i.d.*

Exemple 9.21.

On modélise le plus souvent une suite de n expériences aléatoires indépendantes (comme par exemple n lancers de dés) par une suite (X_k) de n v.a.i.i.d (donnant par exemple le résultat de chacun des n lancers).

Proposition 9.41.

Soit $(X_i)_{1\leq i\leq m}$ une famille finie de variables aléatoires. Celles-ci sont mutuellement indépendantes si et seulement si, quel que soit $k\in[\![1,m]\!]$, les entiers distincts $i_1,\dots,i_k$ appartenant à $[\![1,m]\!]$, et $(x_1,\dots,x_k)\in X_{i_1}(\Omega)\times\cdots\times X_{i_k}(\Omega)$ on a:

$$\mathbf{P}(X_{i_1}=x_1,\dots,X_{i_k}=x_k)=\mathbf{P}(X_{i_1}=x_1)\times\cdots\times\mathbf{P}(X_{i_k}=x_k).$$

Théorème 9.42. **Lemme des coalitions**

Soient $1\leq m<n$ des entiers, ainsi que des variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$. On considère encore des fonctions $f_1,\dots,f_n$ définies sur $\mathbb{R}$, ainsi que deux fonctions de plusieurs variables $F:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ et $G:\mathbb{R}^{n-m}\to\mathbb{R}$. Si $X_1,\dots,X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors les trois suites de variables aléatoires suivantes le sont également:

i. $X_1,\dots,X_m$;
ii. $f_1(X_1),\dots,f_n(X_n)$;
iii. $F(X_1,\dots,X_m),G(X_{m+1},\dots,X_n)$.

Remarque 9.23.
Le deuxième point ci-dessus implique par exemple que, si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$, quelles que soient les fonctions f et g. Intuitivement cela signifie que, quels que soient les procédés déterministes employés (ici des fonctions de la variable réelle), on ne peut créer une dépendance là où il n'y en avait pas.

Exemple 9.22.

✗ Si X, Y, Z sont mutuellement indépendantes, alors $X+Y$ et Z sont indépendantes.

✗ Si X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sont 5 variables aléatoires discrètes discrètes mutuellement indépendantes alors les variables $X_1 - X_2 + 2X_4^2$ et $X_3 - X_5^2$ sont indépendantes.

✗ Si X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes, alors X et Y ne le sont pas non plus.

8.3 Loi d'une somme de deux variables aléatoires

Proposition 9.43. **Loi de la somme**
Soient X, Y deux variables aléatoires telle que $X(\Omega) = \{x_i | : \ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j : \ j \in J\}$. Alors la loi de $Z = X + Y$ est donnée par

$$Z(\Omega) = \{x_i + y_j \ \ i \in I, j \in J\}$$

et

$$\forall z \in Z(\Omega), \ \mathbf{P}(X+Y=z) = \sum_{(i,j):\ x_i+y_j=z} \mathbf{P}((X=x_i) \cap (Y=y_j))$$

Remarque 9.24.
Si X et Y prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}$, on obtient:

$$\mathbf{P}(X+Y=n) = \sum_{i+j=n} \mathbf{P}(X=i, Y=j) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(X=i, Y=n-i).$$

C'est le plus souvent cette formule que l'on rencontre en exercice.

Exercice 9.28.
Soient X et Y deux variables indépendantes suivant toutes deux la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.
1. Déterminer, en utilisant un s.c.e associé à X, $\mathbf{P}(X=Y)$.
2. Montrer, en utilisant un s.c.e associé à X que pour tout $n \geq 2$: $\mathbf{P}(X+Y=n) = (n-1)p^2q^{n-2}$.

Théorème 9.44. **Stabilité par somme de certaines lois usuelles**
Soient $X_1, X_2, \ldots, X_m$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes. On a les résultats suivants.

i. Si $X_1, \ldots, X_m \sim \mathcal{B}(1,p)$, alors $X_1 + \cdots + X_m \sim \mathcal{B}(m,p)$.
ii. Si $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1,p)$ et $X_2 \sim \mathcal{B}(n_2,p)$, alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}(n_1+n_2,p)$.
iii. Si $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1), \ldots, X_m \sim \mathcal{P}(\lambda_m)$, alors $X_1 + \cdots + X_m \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_m)$.

9 Sélection d'exercices

Dénombrement

Exercice 9.29.

1. On tire au hasard simultanément 5 cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 coeurs?
2. On tire au hasard et successivement, sans remise, 5 cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 coeurs?
3. On tire au hasard et successivement, avec remise, 5 cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 coeurs?

Exercice 9.30. ***She's a maniac***

Une étudiante sérieuse souhaite ranger ses livres de cours sur une étagère. Sa collection regroupe 3 livres de Mathématiques, 2 livres de SI et 4 livres de Physiques-Chimie. Combien y a-t-il de façon de ranger les 9 livres:

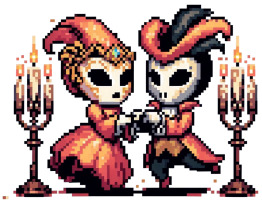
1. En tout?
2. De sorte que tous les livres soient classés par matière?
3. De sorte que les livres de mathématiques ne soient pas regroupés alors que c'est le cas pour les deux autres matières?
4. De sorte que seuls les livres de mathématiques soient regroupés?

Exercice 9.31. **Secret Santa**

Un enseignant sympathique (toute ressemblance avec des personnes existantes est purement fortuite) organise, juste avant les fêtes, un *Secret Santa* pour sa classe. Les n participants mettent leur nom dans une urne et chacun tirera un petit papier et devra offrir un cadeau à la personne dont le nom est inscrit sur le petit papier. On appelle tirage l'attribution d'un papier à chaque participant.

1. Combien y a-t-il de tirages différents?
2. L'enseignant adore les cadeaux. Il décide de glisser non pas un seul, mais p papiers avec son nom. Ni vu ni connu.
   a. Combien y a-t-il de tirages différents dans cette nouvelle disposition? (Chaque participant continue de ne tirer qu'un seul papier).
   b. Dans combien de ces tirages l'enseignant se fait-il un cadeau à lui-même?
   c. Quel est le nombre de tirages pour lesquels les p papiers de l'enseignant sont tirés?

Exercice 9.32. **Eyes Wide Shut**



Dans une société secrète, n couples se rendent à une soirée spéciale, tous masqués, un membre avec un masque noir, l'autre avec un masque blanc. À l'arrivée, on sépare les couples, on numérote les porteurs de masques noirs de 1 à n , et les porteurs de masque blancs de 1 à n. On les fait ensuite s'avancer dans le hall principal d'un manoir éclairé à la bougie, chaque masque noir choisissant au hasard un masque blanc pour partenaire.
On s'intéresse à la situation où tous les couples de départ sont *dérangés*, c'est à dire que personne ne se retrouve avec son partenaire légitime.

Soit E un ensemble à n éléments. On appelle *dérangement* toute bijection de E dans E ne laissant **aucun** élément invariant. On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des dérangements de E et D_n son cardinal, *i.e* le nombre de dérangements de E. Par convention, on note $D_0 = 1$.

1. Exprimer p_n en fonction de n et et D_n.
2. Que vaut nécessairement D_1? Que vaut D_2? *On commencera par faire des dessins.*
3. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Combien y a-t-il, en fonction de D_k; de permutations de E laissant invariants exactement k éléments? En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k = n!.$$

4. À l'aide de la formule précédente, déterminer D_3, D_4 et D_5, en déduire p_3, p_4 et p_5.

5. Soit $n \geq 2$.
   a. On introduit $\mathcal{D}_n^1 = \{\sigma \in \mathcal{D}_n : \sigma^2(1) = 1.\}$. Montrer que : $\text{Card}\left(\mathcal{D}_n^1\right) = (n-1)D_{n-2}$.
   b. On introduit, en toute logique, $\mathcal{D}_n^2 = \{\sigma \in \mathcal{D}_n : \sigma^2(1) \neq 1.\}$.

      i. Soit $\sigma \in \mathcal{D}_n^2$. On note $k = \sigma(1)$. Soit τ alors la bijection de E qui permute 1 et k et qui laisse tous les autres éléments invariants. Quelle est la bijection réciproque de τ?
      ii. Montrer que $\tau\sigma$ est une permutation de E qui ne laisse que 1 invariant.
      iii. En déduire que $\psi : \sigma \mapsto \tau\sigma$ est une bijection de $\{\sigma \in \mathcal{D}_n^2 : \sigma(1) = k\}$ sur l'ensemble de dérangements de $\{2, 3, ..., n\}$. En déduire que

$$\text{Card}\left(\mathcal{D}_n^2\right) = (n-1)D_{n-1}.$$

   c. Conclure (ou admettre) que, pour tout $n \geq 2$, $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$.

6. En déduire, par récurrence que

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Probabilités

Exercice 9.33. Chaussettes

On range k paires de chaussettes dans n tiroirs, au hasard. Avec quelle probabilité les paires de chaussettes se retrouvent-elles toutes dans des tiroirs différents?

Exercice 9.34.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et (A_n) une suite d'évènements mutuellement indépendants.

1. Montrer que

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} \mathbf{P}(\overline{A}_n).$$

2. On suppose que $\mathbf{P}(A_n) \neq 1$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes:

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum \ln\left(\mathbf{P}\left(\overline{A}_n\right)\right) \text{ diverge}$$

Exercice 9.35.

On dispose de deux urnes, $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$. La première contient deux boules blanches et quatre noires alors que la seconde contient cinq boules blanches et sept noires.

On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes:

- ✗ On choisit une urne au hasard et on tire la boule dans l'urne choisie
- ✗ On note la couleur et on remet la boule dans l'urne dont elle provient
- ✗ Si la boule tirée est blanche, on fait le tirage suivant dans l'urne $\mathcal{U}_1$, sinon dans l'autre.

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note B_n l'évènement "la boule tirée au $n-$ième tirage est blanche" et $p_n = \mathbf{P}(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Trouver une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
3. En déduire la valeur de p_n en fonction de n.

Exercice 9.36.

Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans l'urne, en notant à chaque fois la couleur. On s'intéresse aux évènements:

- ✗ A_n "les deux couleurs sont présentes à l'issue des n tirages";
- ✗ B_n "on obtient au plus une boule noire".

1. Déterminer les probabilités, en fonction de n, des évènements A_n et B_n.
2. Étudier leur indépendance pour $n = 2$ et $n = 3$.

Exercice 9.37.

On dispose de deux dés (cubiques) A et B:

- ✗ Le dé A a quatre faces rouges et deux faces blanches;
- ✗ Le dé B a deux faces rouges et quatre faces blanches.

On lance une pièce de monnaie, dont la probabilité d'obtenir "pile" est $\frac{1}{3}$: si on obtient "pile", on ne joue qu'avec le dé A, sinon on ne joue qu'avec le dé B.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir "blanc" au troisième lancer sachant qu'on a obtenu "rouge" aux deux premiers?
2. On a obtenu n fois "rouge" en n jets du dé. Quelle est la probabilité d'avoir joué avec le dé A?

Exercice 9.38. **Oral Math II 2021**

1. Montrer que : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.

2. On dispose de deux urnes A et B contenant chacune n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule dans A et on note a son numéro, on tire une boule dans B et on note b son numéro. Soit E_n l'événement « a divise b ».

a. Calculer $\mathbf{P}(E_3)$ et $\mathbf{P}(E_4)$.
b. Calculer $\mathbf{P}(E_n)$. En donner un équivalent et la limite lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 9.39.

Dans un groupe d'étudiants, il y a n filles et n garçons. On veut faire des groupes de deux pour des exposés et ces groupes seront choisis au hasard.

1. Combien y a-t-il de listes ordonnées de paires d'étudiants?
2. Combien de ces listes sont formées uniquement de groupes mixtes?
3. En déduire la probabilité p_n que tous les groupes soient mixtes.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\frac{2^{2n-1}}{n} \leq \binom{2n}{n} \leq 2^{2n}.$$

5. Quelle est alors la limite de p_n?

Exercice 9.40. **Oral Math II 2024**

On considère un dés à 6 faces avec 2 faces de 0, 2 faces de 1 et 2 faces de 2.
On réalise trois lancers indépendants et on note A, B et C les résultats.
On note Δ la partie du plan d'équation $Ax + By + C = 0$.

1. Calculer la probabilité que Δ soit une droite.

On réalise une deuxième fois les trois tirages, les résultats sont notés A', B' et C'.
On note Δ' la partie d'équation $A'x + B'y + C' = 0$.

2. Calculer la probabilité que Δ et Δ' soient toutes les deux des droites.

3. Calculer la probabilité que Δ et Δ' soient deux droites parallèles.

4. Calculer la probabilité que Δ et Δ' soient deux droites perpendiculaires.

Variables aléatoires

Exercice 9.41. **Les changements (c'est maintenant)**

On lance indéfiniment une pièce donnant *Pile* avec la probabilité p et *Face* avec la probabilité $q = 1 - p$. On suppose que $p \in]0, 1[$ et on admet que les lancers sont mutuellement indépendants.
Pour tout entier naturel k, supérieur ou égal à 2, on dit que le $k^{ième}$ lancer est un changement s'il amène un résultat différent de celui du $(k-1)^{ième}$ lancer.
On note P_k (resp. F_k) l'événement : "on obtient *Pile* (resp. *Face*) au $k^{ième}$ lancer".
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note X_n la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de changements survenus durant les n premiers lancers.

1. Déterminer la loi de X_2.
2. Déterminer la loi de X_3.
3. Déterminer la loi de X_4.
4. Montrer que dans le cas particulier $p = q = 1/2$, X_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. Vérifier que c'est cohérent avec les résultats précédents.

Exercice 9.42.

Dans cet exercice, p désigne un réel de $]0;1[$. Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de *Pile* ou *Face* dont les règles sont les suivantes:

- ✗ le joueur A dispose d'une pièce amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième *Pile*. On note X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de *Face* alors obtenus;
- ✗ le joueur B dispose d'une autre pièce amenant *Pile* avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un *Pile*. On note Y la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de *Face* alors obtenus;
- ✗ Le joueur A gagne si son nombre de *Face* obtenus est inférieur ou égal à celui de B; sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

2. a. Décrire les évènements $[X=0]$, $[X=1]$, $[X=2]$ puis calculer leurs probabilités.
b. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbf{P}(X=n) = (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}$.
c. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

3. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\quad \mathbf{P}(Y \geq n) = (1-p)^n$.

4. a. Montrer que

$$\mathbf{P}(X \leq Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X=n)\mathbf{P}(Y \geq n).$$

b. Déterminer la valeur de p pour laquelle le jeu est équilibré.

Exercice 9.43.

On place au hasard deux paires de chaussettes de couleurs différentes dans deux tiroirs notés t_1 et t_2. Un tiroir peut donc contenir de 0 à 2 paires.
On note X_1 et X_2 respectivement les variables aléatoires égales au nombre de paires de chaussettes contenues dans les tiroirs t_1 et t_2 ainsi que N le nombre de tiroirs occupés.
On note alors T_i le numéro du tiroir choisi pour la paire de chaussettes numéro i. Les paires de chaussettes étant rangées dans les tiroirs indépendamment les unes des autres, on suppose donc que les variables T_1 et T_2 sont indépendantes.

1. Préciser les lois de T_1 et T_2.
2. À l'aide des variables T_i, déterminer la loi conjointe du couple (N, X_1) que l'on présentera en recopiant et complétant le tableau suivant.

X_1 \ N	0	1	2
1			
2			

3. En déduire les lois marginales de N et X_1. Que dire de l'indépendance de N et X_1?

Exercice 9.44. Oral Math II 2023

Un pêcheur possède un dé dont il s'aide pour pêcher. Son dé a une probabilité p de tomber sur l'as. Le pêcheur lance le dé autant de fois qu'il faut pour tomber sur l'as, tout en comptant le nombre de lancers nécessaires. On note X la variable aléatoire associée.

1. Trouver la loi de X, son espérance, sa variance. Calculer $\mathbf{P}(X > 1)$.
2. Si l'événement $(X = k)$ est réalisé, le pêcheur pêche k quarts d'heure. Il compte le nombre de poissons qu'il pêche pendant ces k quarts d'heure, variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre k. Donner la loi du couple (X, Y).
3. Donner la loi de Y comme somme d'une série que l'on ne cherchera pas à calculer.

Exercice 9.45. — Oral Math I 2025

On définit la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ par $p_1 = \dfrac{1}{6}$, $\quad p_{n+1} = \dfrac{1+5p_n}{6}$.

1. Exprimer le terme général de la suite (p_n), pour $n \geqslant 1$.

On prend N dés équilibrés qu'on lance simultanément. On note X_1 le nombre de six obtenus et on retire alors les dés qui ont donné un six. On réitère l'expérience et on note X_2 le nombre de nouveaux six obtenus et on retire alors les dés qui ont donné un six. On réitère de nouveau n fois l'expérience et on note S_n le nombre de six obtenus après n lancers, soit

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

2. Déterminer la loi de S_1 et la loi de S_2.
3. Montrer que S_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(N, p_n)$.
4. Montrer que l'événement $S_n = N$ à partir d'un certain rang n est quasi-certain.

Exercice 9.46. — Oral Math I 2026

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes (définies sur le même espace probabilisé) telle que $X \sim \mathcal{G}(p)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $p \in]0,1[$ et $\lambda > 0$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la matrice aléatoire M_n de taille n définie par

$$M_n = \begin{pmatrix} X & Y & \cdots & Y \\ Y & X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & Y \\ Y & \cdots & Y & X \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\mathbf{P}(M_n = I_n)$.
2. Déterminer $\mathbf{P}(M_n = J_n)$, où J_n est la matrice de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1.
3. Déterminer la probabilité que M_n soit diagonalisable.
Trouver une matrice D diagonale telle que, presque sûrement $M_n \sim D$.
4. Déterminer la probabilité que M_n soit inversible.

Exercice 9.47.

Soient $\lambda, a > 0$ tels que $a \neq 1$. On suppose avoir un couple (X, Y) de variables aléatoires tels que :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbf{P}(X = i, Y = j) = \begin{cases} \dfrac{\lambda a^i}{j!} & \text{si } 0 \leqslant i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Déterminer la loi de Y et calculer λ pour qu'il s'agisse bien d'une loi de couple.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 9.48. — Oral Math II 2018

On pose:

$$\forall j \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{P}(X = j, Y = k) = a\frac{j+k}{3^{j+k}} \qquad \text{et} \qquad S_k = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j+k}{3^{j+k}}.$$

1. Montrer l'existence de S_k et déterminer sa valeur.
2. Montrer que $\sum S_k$ converge et déterminer sa valeur.
3. Trouver la valeur de a.
4. Donner les lois marginales de X et de Y. Sont-elles indépendantes?
5. Donner la valeur de $\mathbf{P}(X = Y)$.