



Remise en route (Révisions) - Éléments de solution

6 Autres exercices

6.1 Manipulation de sommes, de produits

Exercice 28.

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(i) \prod_{i=0}^n 2^i, \quad (ii) \prod_{i=1}^n \frac{i+1}{2}, \quad (iii) \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

Solution.

$$(i) \prod_{i=0}^n 2^i = 2^{\sum_{i=0}^n i} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$(ii) \prod_{i=1}^n \frac{i+1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \prod_{i=1}^n (i+1) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \prod_{j=2}^{n+1} j = \left(\frac{1}{2}\right)^n \prod_{j=1}^{n+1} j = \left(\frac{1}{2}\right)^n (n+1)!$$

$$(iii) \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{k+1}{k}\right) = \frac{\prod_{k=1}^n (k+1)}{\prod_{k=1}^n k} = \frac{\prod_{j=2}^{n+1} j}{\prod_{k=1}^n k} = n+1$$

□

Exercice 29.

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(i) \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j), \quad (ii) \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j}, \quad (iii) \sum_{1 \leq i, j \leq n} \ln(i^j).$$

Solution. Commençons par observer que $\min(i, j) = \begin{cases} i, & \text{si } i < j \\ j, & \text{si } i \geq j \end{cases}$.

$$\begin{aligned} (i) \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \min(i, j) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i j + \sum_{j=i+1}^n i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i(i+1)}{2} + i(n-i) \right) = \sum_{i=1}^n \left(\left(n + \frac{1}{2}\right) i - \frac{i^2}{2} \right) \\ &= \frac{2n+1}{2} \sum_{i=1}^n i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (ii) \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j} &= \sum_{i=1}^{n-1} i \sum_{j=i+1}^n \frac{1}{j} = \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j-1} i \\
 &= \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} \times \frac{j(j-1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=2}^n (j-1) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{4}. \\
 (iii) \quad \sum_{1 \leq i, j \leq n} \ln(i^j) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n j \ln(i) = \left(\sum_{i=1}^n \ln(i) \right) \left(\sum_{j=1}^n j \right) \\
 &= \frac{n(n+1)}{2} \ln \left(\prod_{i=1}^n i \right) = \frac{n(n+1)}{2} \ln(n!)
 \end{aligned}$$

□

6.2 Équations trigonométriques

Exercice 30.

Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $[-\pi, \pi]$ les équations et inéquations suivantes :

- | | |
|--|---|
| (i) $\cos(5x) - \sin(5x) = 0$ | (ii) $\cos(2x) + (\sqrt{3} + 2) \cos(x) + 1 + \sqrt{3} = 0$ |
| (iii) $\tan(x) \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$ | (iv) $\cos(3x) - \sin(3x) < \sqrt{2}$ |
| (v) $\sqrt{2}(\cos(5x) - \sin(5x)) - (\cos(x) + \sqrt{3} \sin(x)) = 0$ | (vi) $\cos(x) + \cos 7x = \cos(3x)$ |
| (vii) $\cos(x) - \cos 2x = \sin(3x)$ | (viii) $\cos(2x) - 9 \cos(x) + 5 > 0$ |

Solution. On note à chaque fois $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation considérée, et $\mathcal{S}_{[-\pi, \pi]}$ l'ensemble des solutions dans $[-\pi, \pi]$.

- i. ✕ Méthode 1 : Si x est solution, alors $\cos 5x \neq 0$ (si $\cos 5x$ était nul, $\sin 5x$ vaudrait ± 1 , et donc l'équation ne serait pas satisfaite). On peut donc tout diviser par $\cos 5x$. L'équation est successivement équivalente à : $\tan 5x = 1$, puis $5x \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\pi}$, puis $x \equiv \frac{\pi}{20} \pmod{\frac{\pi}{5}}$.
Dans $[-\pi, \pi]$, les solutions sont

$$-\frac{19\pi}{20}, -\frac{15\pi}{20}, -\frac{11\pi}{20}, -\frac{7\pi}{20}, -\frac{3\pi}{20}, \frac{\pi}{20}, \frac{5\pi}{20}, \frac{9\pi}{20}, \frac{13\pi}{20}, \frac{17\pi}{20}.$$

✕ Méthode 2 : L'équation équivaut à $\cos 5x = \sin 5x$, c'est-à-dire $\cos 5x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right)$, que l'on sait résoudre...

✕ Méthode 3 : l'équation équivaut à $\sqrt{2} \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, que l'on sait résoudre...

- ii. Soit $x \in \mathbb{R}$. On commence par utiliser la formule de duplication du cosinus : ainsi l'équation s'écrit $2 \cos^2(x) + (\sqrt{3} + 2) \cos(x) + \sqrt{3} = 0$.

On pose alors $X = \cos(x)$; on se ramène ainsi à la recherche de racine d'un trinôme du second degré :

$$2 \cos^2(x) + (\sqrt{3} + 2) \cos(x) + \sqrt{3} = 0 \iff 2X^2 + (\sqrt{3} + 2)X + \sqrt{3} = 0.$$

Le discriminant du trinôme vaut alors :

$$\Delta = (\sqrt{3} + 2)^2 - 8\sqrt{3} = (3 + 4\sqrt{3} + 4) - 8\sqrt{3} = 3 - 4\sqrt{3} + 4 = (\sqrt{3} - 2)^2.$$

On en déduit alors les deux racines du trinôme : -1 et $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
 2 \cos^2(x) + (\sqrt{3} + 2) \cos(x) + \sqrt{3} &= 0 \\
 \iff \cos(x) &= -1 \text{ ou } \cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
 \iff x &\equiv \pi \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv \frac{5\pi}{6} \pmod{2\pi} \text{ ou } x \equiv \frac{-5\pi}{6} \pmod{2\pi}
 \end{aligned}$$

D'où le résultat :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ et } \mathcal{S}_{]-\pi, \pi]} = \left\{ -\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \pi \right\}.$$

iii. Avant de résoudre cette équation, il faut déterminer pour quelles valeurs de x elle a un sens. Pour que $\tan(x)$ soit défini, il faut et il suffit que $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

De même, pour que $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ soit défini, il faut et il suffit que $x + \frac{\pi}{4} \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, ce qui équivaut à $x \not\equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\pi}$.

L'équation est défini pour $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ et $x \not\equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\pi}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ et $x \not\equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\pi}$. Alors, en utilisant une formule d'addition, on obtient :

$$\begin{aligned} \tan(x) \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 &\iff \tan(x) \frac{1 + \tan(x)}{1 - \tan(x)} = -1 \\ &\iff \tan^2(x) + \tan(x) = \tan(x) - 1 \\ &\iff \tan^2(x) = -1 \end{aligned}$$

Comme un carré n'est jamais strictement négatif, on en déduit directement le résultat : $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \emptyset$ et $\mathcal{S}_{]-\pi, \pi]} = \emptyset$.

iv. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant une formule d'addition, on obtient :

$$\begin{aligned} \cos(3x) - \sin(3x) < \sqrt{2} &\iff \sqrt{2} \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) < \sqrt{2} \\ &\iff \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) < 1 \\ &\iff \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 1 \quad \text{car un cosinus est toujours dans l'intervalle }]-1, 1[\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \iff 3x + \frac{\pi}{4} \equiv 0 \pmod{2\pi} \iff 3x \equiv -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi} \iff x \equiv -\frac{\pi}{12} \pmod{\frac{2\pi}{3}}.$$

On en déduit le résultat :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} : k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ et } \mathcal{S}_{]-\pi, \pi]} =]-\pi, \pi] \setminus \left\{ -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12} \right\}.$$

v. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant les formules d'additions puis de factorisation, on obtient :

$$\begin{aligned} \sqrt{2}(\cos(5x) - \sin(5x)) - (\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x)) &= 0 \\ &\iff 2\cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \\ &\iff -4\sin\left(3x - \frac{\pi}{24}\right)\sin\left(2x + \frac{7\pi}{24}\right) = 0 \\ &\iff \sin\left(3x - \frac{\pi}{24}\right) = 0 \text{ ou } \sin\left(2x + \frac{7\pi}{24}\right) = 0 \\ &\iff 3x - \frac{\pi}{24} \equiv 0 \pmod{\pi} \text{ ou } 2x + \frac{7\pi}{24} \equiv 0 \pmod{\pi} \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{72} \pmod{\frac{\pi}{3}} \text{ ou } x \equiv \frac{-7\pi}{48} \pmod{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

On en déduit directement le résultat.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\mathbb{R}} &= \left\{ \frac{\pi}{72} + k\frac{\pi}{3} : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{-7\pi}{48} + k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}, \\ \mathcal{S}_{]-\pi, \pi]} &= \left\{ \frac{-71\pi}{72}, \frac{-47\pi}{72}, \frac{-23\pi}{72}, \frac{\pi}{72}, \frac{25\pi}{72}, \frac{49\pi}{72}, \frac{-31\pi}{48}, \frac{-7\pi}{48}, \frac{17\pi}{48}, \frac{41\pi}{48} \right\}. \end{aligned}$$

vi. On utilise une formule de transformation de somme en produit.

$$\begin{aligned} \cos x + \cos 7x = \cos 3x &\iff 2\cos 4x \cos 3x = \cos 3x \\ &\iff \cos 3x = 0 \text{ ou } \cos 4x = \frac{1}{2} \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{\frac{\pi}{3}} \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{12} \pmod{\frac{\pi}{2}} \text{ ou } x \equiv \frac{-\pi}{12} \pmod{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Dans $]-\pi, \pi]$ les solutions sont :

$$-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6},$$

puis

$$-\frac{11\pi}{12}, -\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}$$

et enfin

$$-\frac{7\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}.$$

vii.

$$\begin{aligned} \cos x - \cos 2x = \sin 3x &\iff 2 \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{3x}{2} \\ &\iff \sin \frac{3x}{2} \left(\cos \frac{3x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) = 0 \\ &\iff \sin \frac{3x}{2} \left(\cos \frac{3x}{2} + \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2} \right) \right) = 0 \\ &\iff \sin \frac{3x}{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) = 0 \\ &\iff \sin \frac{3x}{2} = 0 \text{ ou } \cos \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = 0 \text{ ou } \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) = 0 \\ &\iff x \equiv 0 \pmod{\frac{2\pi}{3}} \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\pi} \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

Dans $]-\pi, \pi]$: $-\frac{2\pi}{3}, 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}$.

viii. Soit $x \in \mathbb{R}$. On commence par utiliser la formule de duplication du cosinus : ainsi l'inéquation s'écrit $2 \cos^2(x) - 9 \cos(x) + 4 > 0$. On pose alors $X = \cos(x)$; on se ramène ainsi à l'étude du signe d'un trinôme du second degré :

$$2 \cos^2(x) - 9 \cos(x) + 4 > 0 \iff 2X^2 - 9X + 4 > 0.$$

Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 49$ et ses racines sont 4 et $\frac{1}{2}$. On en déduit directement le tableau de signe du trinôme. On aurait aussi pu le retrouver en écrivant $2X^2 - 9X + 4 = 2((X-4)(X-\frac{1}{2}))$. On en déduit alors :

$$\begin{aligned} 2 \cos^2(x) - 9 \cos(x) + 4 > 0 &\iff \cos(x) < \frac{1}{2} \text{ ou } \cos(x) > 4 \\ &\iff \cos(x) < \frac{1}{2} && \text{car } \cos(x) > 4 \text{ n'a pas de solutions} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{aligned}$$

Pour se convaincre de la dernière équivalence, on peut tracer un cercle trigonométrique. On en déduit le résultat :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \right[\text{ et } \mathcal{S}_{]-\pi, \pi]} = \left] -\pi, -\frac{\pi}{3} \right[\cup \left] \frac{\pi}{3}, \pi \right[.$$

□

Exercice 31.

1. Résoudre (E) : $\sin(4x) - \sin(x) = 0$.

2. Déterminer un polynôme P tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(4x) - \sin(x) = \sin(x) P(\cos(x)).$$

3. Calculer les racines de P et en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Solution.

1. On a déjà

$$(E) \iff 2 \sin \frac{3}{2}x \cos \frac{5}{2}x = 0 \iff \begin{cases} x = 0 & [\frac{2\pi}{3}] \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{5} & [\frac{2\pi}{5}] \end{cases}$$

en utilisant les formules de transformation de somme en produit.

2. Par duplication :

$$\sin 4x - \sin x = 2 \sin 2x \cos 2x - \sin x = 4 \sin x \cos x (2 \cos^2 x - 1) - \sin x = \sin(x) \cdot P(\cos x)$$

$$\text{avec } P(X) = 8X^3 - 4X - 1.$$

3. P admet $-\frac{1}{2}$ comme racine, ce qui était prévisible car $x = \frac{2\pi}{3}$ est solution de (E) et $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$. En factorisant P on obtient les deux autres racines, qui sont $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$.

Puisque $\frac{\pi}{5}$ est solution de (E) et que $\sin \frac{\pi}{5} \neq 0$, on en déduit que $\cos \frac{\pi}{5}$ est une racine de P . Comme de plus $0 \leq \frac{\pi}{5} \leq \frac{\pi}{2}$, il s'agit d'une racine positive. Comme P n'a qu'une racine positive, on en tire $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$, puis $\cos \frac{2\pi}{5} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{5} - 1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$.

□

Exercice 32.

Exprimer $\cos(7\theta)$ à l'aide de $\cos(\theta)$, pour $\theta \in \mathbb{R}$.

Solution. $\cos 7\theta$ est la partie réelle de $e^{7i\theta} = (e^{i\theta})^7 = (\cos \theta + i \sin \theta)^7$. Il suffit de développer cela par la formule du binôme et d'en extraire la partie réelle, que l'on exprime en fonction de $\cos \theta$ seul.

On trouve $\cos 7\theta = 64 \cos^7 \theta - 112 \cos^5 \theta + 56 \cos^3 \theta - 7 \cos \theta$.

□

Exercice 33.

Linéariser $\sin^3(x) \cos^4(x)$.

Solution. On trouve $\sin^3(x) \cos^4(x) = -\frac{1}{64} (\sin(7x) + \sin(5x) - 3 \sin(3x) - 3 \sin(x))$ en appliquant la méthode vue en cours (formule d'Euler puis binôme de Newton avant de regrouper les termes deux-à-deux conjugués).

□

Exercice 34.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} 3^k \sin^3 \left(\frac{\pi}{3^{k+1}} \right).$$

1. a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$, puis en déduire une expression de $\sin^3(x)$ en fonction de $\sin(3x)$ et de $\sin(x)$.

b. En utilisant la question précédente, montrer $S_n = \frac{3^n}{4} \sin \left(\frac{\pi}{3^n} \right)$.

2. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Solution.

1. On a :

$$\begin{aligned} \sin(3x) &= \sin(2x + x) = \sin(2x) \cos(x) + \cos(2x) \sin(x) \\ &= 2 \sin(x) \cos^2(x) + (1 - 2 \sin^2(x)) \sin(x) \\ &= 2 \sin(x)(1 - \sin^2(x)) + \sin(x) - 2 \sin^3(x) \\ &= 3 \sin(x) - 4 \sin^3(x) \end{aligned}$$

On en déduit le résultat : $\sin^3(x) = \frac{3}{4} \sin(x) - \frac{1}{4} \sin(3x)$.

2. On commence par utiliser la question précédente qui permet de reconnaître une somme télescopique:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} 3^k \sin^3\left(\frac{\pi}{3^{k+1}}\right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n-1} \left(3^{k+1} \sin\left(\frac{\pi}{3^{k+1}}\right) - 3^k \sin\left(\frac{\pi}{3^k}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4} \left(3^n \sin\left(\frac{\pi}{3^n}\right) - \sin(\pi)\right) \\ &= \frac{3^n}{4} \sin\left(\frac{\pi}{3^n}\right). \end{aligned}$$

3. On a $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, donc ici:

$$S_n = \frac{3^n}{4} \sin\left(\frac{\pi}{3^n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3^n}{4} \times \frac{\pi}{3^n} = \frac{\pi}{4} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4}.$$

□

6.3 Polynômes

Exercice 35.

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants.

$$\begin{array}{lll} (i) X^3 - 6X^2 + 11X - 6 & (ii) X^4 + X^2 + 1 & (iii) X^6 + X^3 + 1 \\ (iv) (3X - 1)^5 - (X + 2)^5 & (v) X^3 + 8i & (vi) X^4 - \sqrt{2} + i\sqrt{2} \end{array}$$

Solution.

i. On commence par remarquer que 1 est racine évidente. La division euclidienne de $X^3 - 6X^2 + 11X - 6$ par $X - 1$ donne alors $X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = (X - 1)(X^2 - 5X + 6)$. Le calcul du discriminant fournit alors la forme factorisée : $(X - 1)(X - 2)(X - 3)$.

ii. On a déjà $y^2 + y + 1 = \left(y - e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)\left(y - e^{\frac{4i\pi}{3}}\right)$, soit en calculant le discriminant, soit en utilisant la relation

$y^3 - 1 = (y - 1)(y^2 + y + 1)$ et en utilisant les racines cubiques de l'unité $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}}$. On peut alors écrire, en utilisant l'identité remarquable $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$:

$$X^4 + X^2 + 1 = \left(X^2 - e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)\left(X^2 - e^{\frac{4i\pi}{3}}\right) = \left(X - e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\left(X + e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\left(X - e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)\left(X + e^{\frac{2i\pi}{3}}\right).$$

iii. On raisonne comme ci-dessus, mais cette fois on remplace y par X^3 . On utilise également le fait que si a est une racine cubique de z , alors les deux autres sont $j \times a$ et $j^2 \times a$:

$$\begin{aligned} X^6 + X^3 + 1 &= \left(X^3 - e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)\left(X^3 - e^{\frac{4i\pi}{3}}\right) \\ &= \left(X - e^{\frac{2i\pi}{9}}\right)\left(X - e^{\frac{8i\pi}{9}}\right)\left(X - e^{\frac{14i\pi}{9}}\right)\left(X - e^{\frac{4i\pi}{9}}\right)\left(X - e^{\frac{10i\pi}{9}}\right)\left(X - e^{\frac{16i\pi}{9}}\right) \end{aligned}$$

iv. Soit $x \in \mathbb{C}$. On commence par remarquer que $x = -2$ n'est pas racine de $(3x - 1)^5 - (x + 2)^5 = 0$, à partir de quoi on peut écrire :

$$\begin{aligned} (3x - 1)^5 - (x + 2)^5 = 0 &\iff \left(\frac{3x - 1}{x + 2}\right)^5 = 1 \\ &\iff \frac{3x - 1}{x + 2} \in \mathbb{U}_5 \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket, \frac{3x - 1}{x + 2} = e^{\frac{2ik\pi}{5}} \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket, x = \frac{2e^{\frac{2ik\pi}{5}} + 1}{3 - e^{\frac{2ik\pi}{5}}} \end{aligned}$$

On en déduit la forme factorisée du polynôme, en n'oubliant pas que celui-ci possède $3^5 - 1$ comme terme dominant :

$$(3X - 1)^5 - (X + 2)^5 = (3^5 - 1) \prod_{k=0}^4 \left(X - \frac{2e^{\frac{2ik\pi}{5}} + 1}{3 - e^{\frac{2ik\pi}{5}}} \right).$$

v. Déjà $z^3 + 8i = 0 \iff z^3 = -8i$. Or $-8i = 2^3 e^{-i\frac{\pi}{2}}$ admet $2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ pour racine cubique évidente. On obtient les autres racines cubiques en multipliant par les racines cubiques de l'unité, d'où la factorisation :

$$X^3 + 8i = (X - 2e^{-i\frac{\pi}{6}})(X - 2e^{i\frac{\pi}{2}})(X - 2e^{i\frac{5\pi}{6}}).$$

vi. Déjà $z^4 - \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 0 \iff z^4 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Or $2e^{-i\frac{\pi}{4}}$ admet $\sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{16}}$ pour racine quatrième évidente. On obtient les autres racines quatrièmes en multipliant par les racines quatrièmes de l'unité, d'où la factorisation :

$$X^4 - \sqrt{2} + i\sqrt{2} = (X - \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{16}})(X - \sqrt[4]{2}e^{i\frac{7\pi}{16}})(X - \sqrt[4]{2}e^{i\frac{15\pi}{16}})(X - \sqrt[4]{2}e^{i\frac{23\pi}{16}}).$$

□

Solution. Après calculs on trouve $P(2) = P'(2) = 0$ et $P''(2) \neq 0$ donc 2 est racine de multiplicité 2. □

Exercice 36.

Montrer que le polynôme P divise Q dans chacun des cas suivants.

1. $Q = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ et $P = (X-1)^3$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
2. $Q = (X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$ et $P = X^2 - X + 1$, avec $n \in \mathbb{N}$.
3. $Q = X^{3n+2} + X^{3p+1} + X^{3q}$ et $P = X^2 + X + 1$, avec $n, p, q \in \mathbb{N}$.

Solution.

i. Il suffit de prouver que 1 est racine de multiplicité au moins 3 de Q , ce qui se fait en montrant $Q(1) = Q'(1) = Q''(1) = 0$.

ii. P admet pour racines $z, \bar{z}$ où $z = e^{\frac{i\pi}{3}}$. Il suffit donc de prouver $Q(z) = Q(\bar{z}) = 0$, et comme $Q \in \mathbb{R}[X]$, il suffit d'établir $Q(z) = 0$. Considérant que $z - 1 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ (il suffit de faire le calcul en utilisant les parties réelles et imaginaires), on peut écrire :

$$Q(z) = \left(e^{\frac{i2\pi}{3}}\right)^{n+2} + \left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^{2n+1} = e^{\frac{i(2n+1)\pi}{3}} (e^{i\pi} + 1) = 0.$$

D'où le résultat.

iii. P admet pour racines $j, \bar{j}$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Il suffit donc de prouver $Q(j) = Q(\bar{j}) = 0$, et comme $Q \in \mathbb{R}[X]$, il suffit d'établir $Q(j) = 0$. Or j est une racine cubique de l'unité, elle vérifie donc $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$, ce qui permet d'écrire :

$$Q(j) = j^{3n+2} + j^{3p+1} + j^{3q} = j + j^2 + 1 = 0.$$

D'où le résultat. □

Exercice 37.

Oral Math II

Soit $P = X^2 - 2X \cos(\theta) + 1$ et $Q_n = X^n \sin(\theta) - X \sin(n\theta) + \sin((n-1)\theta)$, pour $n \geq 2$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que P divise Q_n .
2. Déterminer le quotient dans la division euclidienne de Q_n par P .

Solution.

1. P admet pour racines $e^{i\theta}, e^{-i\theta}$ avec une multiplicité 1; il suffit donc de prouver $Q_n(e^{i\theta}) = Q_n(e^{-i\theta}) = 0$. Et comme $Q_n \in \mathbb{R}[X]$, il suffit d'établir $Q_n(e^{i\theta}) = 0$. Pour cela, on peut séparer parties réelle et imaginaire, puis utiliser une formule d'addition:

$$\begin{aligned} Q_n(e^{i\theta}) &= (\cos(n\theta) \sin \theta - \cos \theta \sin(n\theta) + \sin((n-1)\theta)) + i(\sin(n\theta) \sin \theta - \sin \theta \sin(n\theta)) \\ &= (\sin(-n\theta + \theta) + \sin((n-1)\theta)) + 0i \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Il suffit d'effectuer les deux premières étapes dans la division euclidienne pour conjecturer que le quotient est

$$Q(X) = \sum_{k=0}^{n-2} X^k \sin((n-1-k)\theta),$$

ce que l'on démontre aisément ensuite en développant $Q \times P$, ce qui permet de retrouver Q_n .

□

Exercice 38.

Oral Math II 2024, extrait du cahier de vacances

Soit un entier $q \geq 2$. On pose $Q(X) = qX^q - \sum_{k=0}^{q-1} X^k \in \mathbb{C}[X]$ et $R = (X-1)Q$.

- Montrer que 1 est racine de Q .
- Montrer que si z est racine de Q alors $q|z|^q \leq \sum_{k=0}^{q-1} |z|^k$ et $|z| \leq 1$.
- Montrer que $R(X) = qX^{q+1} - (q+1)X^q + 1$.
- Montrer que 1 est racine double de R et que les autres racines de R sont simples.
- En déduire que Q n'admet que des racines simples.

Solution.

1. $Q(1) = q - q \times 1 = 0$ donc 1 est racine de Q .

2. Si z est racine de Q alors $qz^q = \sum_{k=0}^{q-1} z^k$.

Par inégalité triangulaire, $q|z|^q \leq \sum_{k=0}^{q-1} |z|^k$.

Si $|z| > 1$ alors $|z|^k < |z|^q$ et donc

$$\sum_{k=0}^{q-1} |z|^k < \sum_{k=0}^{q-1} |z|^q = q|z|^q$$

ce qui est contradictoire avec l'inégalité précédente. Donc $|z| \leq 1$.

3. On fait apparaître in télescope :

$$\begin{aligned} R(X) &= (X-1)Q(X) = qX^{q+1} - qX^q - \sum_{k=0}^{q-1} X^{k+1} + \sum_{k=0}^{q-1} X^k \\ &= qX^{q+1} - qX^q - \sum_{k=1}^q X^k + \sum_{k=0}^{q-1} X^k = qxX^q + 1 - (q+1)X^q + 1 \end{aligned}$$

4. $R(1) = q - (q+1) + 1 = 0$, $R'(X) = q(q+1)X^q - q(q+1)X^{q-1}$ et $R'(1) = 0$ puis $R''(X) = q^2(q+1)X^{q-1} - q(q-1)(q+1)X^{q-2}$ donc $R''(1) = q^2(q+1) - q(q-1)(q+1) \neq 0$ car $q \in \mathbb{N}$ et $q \geq 2$.

Donc 1 est racine double de R .

$R'(X) = q(q+1)X^{q-1}(X-1)$ ne s'annule qu'en 0 et 1 ; $R(0) = 1 \neq 0$ donc les autres racines de R' n'annulent pas R' : elles sont simples.

5. $R = (X-1)^2T$ où T n'a que des racines simples distinctes de 1 donc $Q = \frac{R}{X-1} = (X-1)T$ qui n'a que des racines simples.

□

Exercice 39.**Oral Math II 2017**

Soit n un entier naturel impair et P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ayant la propriété $(\mathcal{P})$ suivante :

$$(X^n + 1)P(X) = P(X^2).$$

1. Dire si le polynôme $X^n - 1$ vérifie la propriété $(\mathcal{P})$.
2. Déterminer le degré du polynôme P .
3. Soit ω une racine n -ième de -1 . Montrer que $-\omega$ est racine de P .
4. Quels sont les polynômes vérifiant la propriété $(\mathcal{P})$?

Solution.

1. On a d'une part $(X^n + 1)(X^n - 1) = X^{2n} - 1$ et $P(X^2) = (X^2)^n - 1 = X^{2n} - 1$, d'autre part. Donc, $X^n - 1$ vérifie la propriété $(\mathcal{P})$.
2. Le polynôme nul vérifie clairement la propriété $\mathcal{P}$. Soit donc P un polynôme non nul vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ et soit d son degré. On a :

$$\deg((X^n + 1)P(X)) = \deg(P(X^2))$$

Donc,

$$n + d = 2d$$

ce qui donne

$$d = n$$

Le degré du polynôme P est donc n .

3. Soit ω une racine n -ième de -1 , c'est-à-dire $\omega^n = -1$. En utilisant la propriété $\mathcal{P}$, on a :

$$(X^n + 1)P(X) = P(X^2)$$

En évaluant l'identité précédente en ω , on obtient :

$$(\omega^n + 1)P(\omega) = P(\omega^2)$$

Comme $\omega^n = -1$, on a $P(\omega^2) = 0$. En évaluant maintenant l'identité précédente en $-\omega$, on obtient :

$$((- \omega)^n + 1)P(-\omega) = P(\omega^2)$$

Compte tenu de l'impairité de n , $(-\omega)^n = (-1)^n \omega^n = -(-1) = 1$, ce qui, avec la relation précédente, donne:

$$2P(-\omega) = P(\omega^2) = 0$$

Ainsi, $-\omega$ est racine de P .

4. On vient de voir que les opposées des n racines n -ième de -1 sont racines de P . Comme celui-ci est de degré n , il n'en admet pas d'autres. En remarquant que ω est racine n -ième de -1 si et seulement si ω est racine n -ième de 1 , on déduit que les racines de P sont exactement les racines n -ième de 1 ; par conséquent, les polynômes vérifiant la propriété $(\mathcal{P})$ sont de la forme :

$$P(X) = c \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) \right) = c(X^n - 1)$$

où c est une constante réelle arbitraire.

□

Exercice 40.**Oral Math II 2017**

1. Prouver que $P = (X + i)^7 + (X - i)^7$ est à coefficients réels.
2. Trouver les racines de P .
3. Montrer qu'elles sont réelles et les exprimer à l'aide de fonctions trigonométriques.

Solution.

1. On utilise la formule du binôme : $(X + i)^7 = \sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} X^{7-k} i^k$ et $(X - i)^7 = \sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} X^{7-k} (-i)^k$.

En additionnant, on obtient :

$$P(X) = \sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} X^{7-k} (i^k + (-i)^k).$$

Si k est impair, alors $i^k + (-i)^k = 0$ et si k est pair, alors $i^k + (-i)^k = 2i^k \in \mathbb{R}$.

Ainsi, tous les coefficients de P sont réels.

En développant, on obtient :

$$P(X) = 2X^7 - 42X^5 + 70X^3 - 14X = 2X(X^6 - 21X^4 + 35X^2 - 7).$$

2. On résout. (Comme $z \neq i$, on peut diviser par $(z - i)^7$.) Posons $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{7}$, où $k \in \llbracket 0, 6 \rrbracket$.

$$\begin{aligned} (z+i)^7 + (z-i)^7 = 0 &\iff (z+i)^7 = -(z-i)^7 \\ &\iff \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^7 = -1 \\ &\iff \frac{z+i}{z-i} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{7}}, \quad k \in \llbracket 0, 6 \rrbracket \\ &\iff z+i = e^{i\theta_k}(z-i), \quad k \in \llbracket 0, 6 \rrbracket \\ &\iff z = -i\frac{1+e^{i\theta_k}}{1-e^{i\theta_k}}, \quad k \in \llbracket 0, 6 \rrbracket \end{aligned}$$

3. On utilise les formules $1 + e^{i\theta} = 2e^{i\theta/2} \cos \frac{\theta}{2}$ et $1 - e^{i\theta} = -2ie^{i\theta/2} \sin \frac{\theta}{2}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} z &= -i \frac{2e^{i\theta/2} \cos(\theta/2)}{-2ie^{i\theta/2} \sin(\theta/2)} \\ &= \cot \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Donc

$$z_k = \cot \left(\frac{(2k+1)\pi}{14} \right), \quad k = 0, \dots, 6.$$

Toutes ces racines sont donc réelles.

□

6.4 Nombres complexes, racines de l'unité

Exercice 41.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. Établir que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$, on a : $\prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega^k) = \sum_{i=0}^{n-1} z^i$.
2. Justifier que l'égalité reste valable pour $z = 1$.
3. En déduire l'égalité $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Solution.

1. Par le cours on a $\mathbb{U}_n = \{\omega^k; k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (z - \omega^k) = (z - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega^k) \text{ et } z^n - 1 = (z - 1) \sum_{i=0}^{n-1} z^i.$$

En simplifiant par $z - 1$ (ce qui implique $z \neq 1$) on en déduit le résultat.

2. Soit $P(z) = \prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega^k) - \sum_{i=0}^{n-1} z^i$. On a prouvé $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $P(z) = 0$, donc P est un polynôme possédant une infinité de racines. On en déduit $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = 0$, d'où le résultat.

3. Soit $P = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$. En prenant $z = 1$ dans l'égalité $\sum_{i=0}^{n-1} z^i = \prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega^k)$ il vient :

$$\begin{aligned} n &= \prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{2ik\pi/n}) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n} (e^{-ik\pi/n} - e^{ik\pi/n}) \quad \text{par mise en facteur de l'arc moyen} \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n} (-2i \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right)) \\ &= (-2i)^{n-1} e^{\frac{i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k} \times P \end{aligned}$$

Or

$$(-2i)^{n-1} e^{\frac{i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k} = (-1)^{n-1} 2^{n-1} i^{n-1} e^{\frac{i\pi(n-1)}{2}} = (-1)^{n-1} 2^{n-1} e^{i\pi(n-1)} = 2^{n-1}.$$

D'où le résultat. □

Solution. On remarque déjà que $z = e^{2i\pi/7} \in \mathbb{U}_7$.

1. On a

$$\bar{S} = e^{-2i\pi/7} + e^{-4i\pi/7} + e^{-8i\pi/7} = e^{12i\pi/7} + e^{10i\pi/7} + e^{6i\pi/7} = T.$$

Par ailleurs :

$$\operatorname{Im}(S) = \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} = \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7}.$$

Or $\sin \frac{\pi}{7}, \sin \frac{2\pi}{7}, \sin \frac{4\pi}{7} > 0$ et $\sin \frac{2\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} > 0$ car $\sin$ est strictement croissant sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. D'où $\operatorname{Im}(S) > 0$.

2. On a déjà $S + T = \sum_{k=1}^6 z^k = \sum_{k=0}^6 z^k - 1 = -1$ car la somme des racines 7-èmes de l'unité est nulle.

De même comme $z^7 = 1$ on a $S \cdot T = \sum_{k=0}^6 z^k + 2 = 2$.

On en déduit que S, T sont racines de $X^2 + X + 2$ (par les relations coefficients-racines), et que S est la racine de partie imaginaire strictement positive. D'où $S = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$ et $T = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}$. □

Exercice 42.

On considère l'équation $(z + 1)^5 = (z - 1)^5$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. Résoudre cette équation en développant.
2. Résoudre cette même équation en utilisant les racines cinquièmes de l'unité.
3. En comparant les deux résultats obtenus, déterminer une valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Solution.

1. On a :

$$(z + 1)^5 - (z - 1)^5 = 0.$$

Utilisons la formule du binôme de Newton :

$$(z + 1)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} z^{5-k} \cdot 1^k = z^5 + 5z^4 + 10z^3 + 10z^2 + 5z + 1,$$

$$(z - 1)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} z^{5-k} \cdot (-1)^k = z^5 - 5z^4 + 10z^3 - 10z^2 + 5z - 1.$$

Donc :

$$(z + 1)^5 - (z - 1)^5 = 2(5z^4 + 10z^2 + 1).$$

On obtient :

$$2(5z^4 + 10z^2 + 1) = 0 \iff 5z^4 + 10z^2 + 1 = 0.$$

Posons $u = z^2$, alors :

$$5u^2 + 10u + 1 = 0.$$

Réolvons cette équation quadratique :

$$u = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 20}}{10} = \frac{-10 \pm \sqrt{80}}{10} = \frac{-10 \pm 4\sqrt{5}}{10} = \frac{-5 \pm 2\sqrt{5}}{5}.$$

Donc :

$$z^2 = \frac{-5 \pm 2\sqrt{5}}{5} \iff z = \pm i \sqrt{\frac{5 \pm 2\sqrt{5}}{5}}.$$

2. Comme $z = 1$ n'est clairement pas solution de l'équation, $z - 1 \neq 0$ et on peut diviser.

$$\begin{aligned} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^5 = 1 &\iff \frac{z+1}{z-1} = e^{(2ik\pi)/5} \iff \exists k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket, z+1 = e^{(2ik\pi)/5}(z-1) \\ &\iff \exists k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, z \left(e^{(2ik\pi)/5} - 1 \right) = 1 + e^{(2ik\pi)/5} \\ &\iff \exists k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, z = \frac{1 + e^{(2ik\pi)/5}}{e^{(2ik\pi)/5} - 1} = -i \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)} = -\frac{i}{\tan\left(\frac{k\pi}{5}\right)} \end{aligned}$$

Sachant que la tangente est croissante sur chacun de ses intervalles de définition, et que les valeurs de $\tan\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ sont négatives, on peut effectuer l'identification suivante : $\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}}$; $\frac{1}{\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)} = \sqrt{1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}}$; $\frac{1}{\tan\left(\frac{3\pi}{5}\right)} = -\sqrt{1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}}$, et enfin $\frac{1}{\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)} = -\sqrt{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}}$. En particulier, on aura $\tan^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{5}{5-2\sqrt{5}}$, donc $\frac{1}{\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)} = 1 + \tan^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{10-2\sqrt{5}}{5-2\sqrt{5}}$, et $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{10-2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{(5-2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}{100-20}} = \sqrt{\frac{30-10\sqrt{5}}{80}} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}$. De façon tout à fait similaire, $\tan^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{5}{5+2\sqrt{5}}$, donc $\frac{1}{\cos^2\left(\frac{4\pi}{5}\right)} = \frac{10+2\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}}$, et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}} = -\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$.

□

6.5 Utilisation des complexes en géométrie

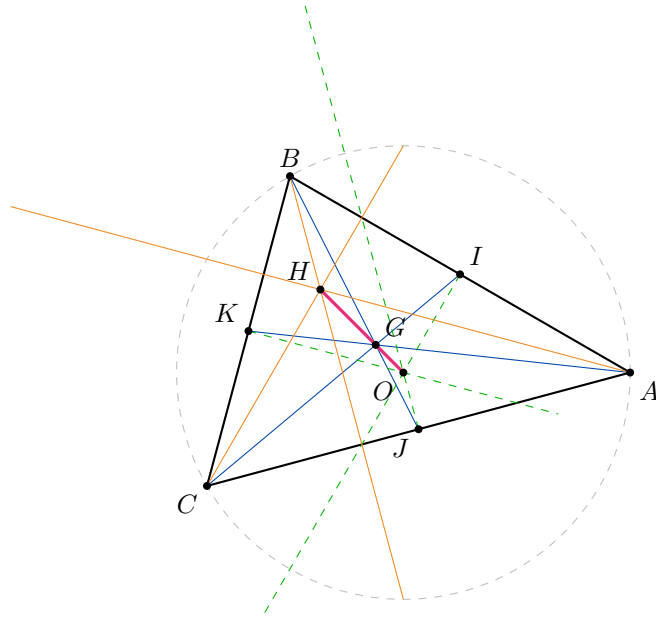
Exercice 43.

Droite d'Euler

ABC est un triangle non aplati, dont le centre de son cercle circonscrit est l'origine O du repère orthonormé direct. On note a, b et c les affixes respectives de A, B et C .

Montrer que les trois médiatrices de ABC sont concourantes en O , que ses médianes sont concourantes en G d'affixe $\frac{1}{3}(a+b+c)$ et que ses hauteurs sont concourantes en H d'affixe $a+b+c$.

Que peut-on dire des points O, G et H ?



Solution. On note R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC . $OA = OB = OC = R$ donc $|a| = |b| = |c| = R$, car $z_O = 0$.

On note I, J, K les milieux respectifs des segments $[AB], [AC], [BC]$.

✕ $OA = OB$ donc O est sur la médiatrice de $[AB]$. De même, O est sur celle de $[AC]$ et sur celle $[BC]$, donc les trois médiatrices de ABC sont concourantes en O .

✕ Notons G le point d'affixe $\frac{a+b+c}{3}$. On a :

$$\frac{z_{\overrightarrow{CG}}}{z_{\overrightarrow{CI}}} = \frac{\frac{a+b+c}{3} - c}{\frac{a+b}{2} - c} = \frac{\frac{a+b-2c}{3}}{\frac{a+b-2c}{2}} = \frac{2}{3} \in \mathbb{R}$$

donc $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont colinéaires $\left(\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CI}\right)$ et G est sur la médiane (CI) du triangle ABC . On montre de même que G est sur les médianes (BJ) et (AK) du triangle ABC . Donc les trois médianes de ABC sont concourantes en G .

✕ Enfin :

$$\frac{z_{\overrightarrow{CH}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{a+b+c-c}{b-a} = \frac{(b+a)(\bar{b}-\bar{a})}{|b-a|^2} = \frac{a\bar{b}-\bar{a}b}{|b-a|^2} = i \left(\frac{2\operatorname{Im}(a\bar{b})}{|b-a|^2} \right) \in i\mathbb{R}$$

donc $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$ et H est sur la hauteur du triangle ABC issue de C .

On montre de même que H est sur la hauteur du triangle ABC issue de B et celle issue de A .

Donc les trois hauteurs de ABC sont concourantes en H .

Au final, on observe que $\frac{z_{\overrightarrow{OG}}}{z_{\overrightarrow{OH}}} = \frac{\frac{a+b+c}{3}}{a+b+c} = \frac{1}{3} \in \mathbb{R}$ donc $\overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont colinéaires $\left(\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OH}\right)$ et O, G, H sont alignés.

La droite (OG) s'appelle la *droite d'Euler*. □

Exercice 44.**Question de cours, Banque PT 2021**

Soit M un point de $\mathbb{R}^2$ d'affixe complexe z .

- Donner sans justification :
 - l'affixe complexe de l'image de M par la rotation r_θ de centre O et d'angle θ .
 - l'affixe complexe de l'image de M par l'homothétie h_a de centre O et de rapport a avec $a \neq 0$.
- Vérifier que $r_\theta \circ h_a = h_a \circ r_\theta$.

Solution.

- L'affixe de $r_\theta(M)$ est $e^{i\theta}z$.
 - L'affixe de $h_a(M)$ est az .
- Observons que $r_\theta(h_a(z)) = e^{i\theta} \times (az) = ae^{i\theta}z = h_a(r_\theta(z))$ et les deux applications commutent.

□

6.6 Suites**Exercice 45.**

Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n^2}$.

Solution. Une récurrence immédiate montre que tous les termes sont strictement positifs. On peut alors voir que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + u_n^2} < 1$$

et (u_n) est décroissante. Par théorème de convergence monotone (décroissante et minorée par 0), la suite est convergente vers $\ell \geq 0$ qui vérifie

$$\ell = \frac{\ell}{1 + \ell^2} \iff 1 + \ell^2 = 1 \iff \ell = 0.$$

□

Exercice 46.**Oral Math II 2023**

Pour tout entier $n \geq 2$, on définit $P_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$ et $G_n(x) = -1 - \ln(1-x) - P_n(x)$.

- Montrer qu'il existe une unique solution $c \geq 0$ vérifiant $P_2(c) = 0$.
- Montrer que pour tout $n \geq 2$, P_n admet une unique racine a_n positive et $a_n \in [0, c]$.
- Calculer $\sup_{x \in [0, c]} |G'_n(x)|$ et prouver que $|1 + \ln(1 - a_n)| \leq 2c^{n-1}$.
- Étudier la suite $(a_n)_{n \geq 2}$ (monotonie, convergence et limite).

Solution. Pour tout entier $n \geq 2$, on définit $P_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$ et $G_n(x) = -1 - \ln(1-x) - P_n(x)$.

- L'équation $-1 + x + \frac{x^2}{2} = 0$ est polynomiale de degré 2, de racines $-1 \pm \sqrt{3}$.
Donc il existe une unique solution $c \geq 0$ vérifiant $P_2(c) = 0$. De plus, $c = -1 + \sqrt{3}$.
- Soit un entier $n > 2$. P_n est une fonction polynomiale continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, comme somme de fonctions qui le sont. Donc, d'après le théorème de la bijection monotone, P_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[-1, +\infty[$. En particulier, $0 \in [-1, +\infty[$ admet un unique antécédent a_n dans $\mathbb{R}_+$ par P_n . De plus, on a :

$$P_n(x) = P_2(x) + \sum_{k=3}^n \frac{x^k}{k}, \text{ donc } P_n(c) = \sum_{k=3}^n \frac{c^k}{k} \geq 0 \geq -1 = P_n(0),$$

ce qui permet d'affirmer que $a_n \in [0, c]$ par (stricte) croissance et bijectivité de P_n (donc aussi de P_n^{-1}). Ceci est vrai pour $n > 2$ mais en combinant avec la Question 1., on peut conclure pour tout $n \geq 2$, P_n admet une unique racine a_n positive et $a_n \in [0, c]$.

3. $0 < c < 1$ donc $\forall x \in [0, c], 1 - x > 0$. La fonction G_n est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, c]$, comme somme de fonctions qui le sont, et pour $x \in [0, c]$, on a :

$$G'_n(x) = \frac{1}{1-x} - \sum_{k=1}^n x^{k-1} \underset{x \neq 1}{=} \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{x^n}{1-x} \geq 0, \text{ donc } |G'_n(x)| = G'_n(x), \text{ et}$$

$$G''_n(x) = \frac{nx^{n-1}(1-x) + x^n}{(1-x)^2} = \frac{x^{n-1}[n - (n-1)x]}{(1-x)^2} \geq 0, \text{ car } 0 \leq x \leq c < 1 < \frac{n}{n-1}.$$

Donc $x \mapsto |G'_n(x)|$ est croissante sur $[0, c]$ et donc $\sup_{x \in [0, c]} |G'_n(x)| = |G'_n(c)| = \frac{c^n}{1-c}$.

Remarque : Pour $x \in [0, c], 0 \leq x^n \leq c^n, 1 - x \geq 1 - c > 0$ donc $0 < \frac{1}{1-x} \leq \frac{1}{1-c}$. Comme tout est positif, en multipliant membre à membre, on a : $\forall x \in [0, c], |G'_n(x)| = \frac{x^n}{1-x} \leq \frac{c^n}{1-c} = |G'_n(c)|$. On retrouve ainsi, que $\sup_{x \in [0, c]} |G'_n(x)| = \frac{c^n}{1-c}$.

Pour la suite de la question, notons que $a_n, 0 \in [0, c]$. Donc, d'après l'I.A.F., on a :

$$|1 + \ln(1 - a_n)| = |G_n(a_n) - G_n(0)| \leq \frac{c^n}{1-c} |a_n - 0| \leq \frac{c^n}{1-c} \times c$$

De plus, $P_2(c) = 0 \iff 1 - c = \frac{c^2}{2}$.

Donc

$$|1 + \ln(1 - a_n)| \leq 2 \frac{c^{n+1}}{c^2} = 2c^{n-1} \quad (*).$$

4. Pour $n \geq 2, P_{n+1}$ est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$P_{n+1}(a_n) = \underbrace{P_n(a_n)}_{=0} + \underbrace{\frac{a_n^{n+1}}{n+1}}_{\geq 0} \geq 0 = P_{n+1}(a_{n+1}), \text{ avec } a_n, a_{n+1} \geq 0, \text{ donc } a_n \geq a_{n+1} \geq 0$$

Ainsi, $(a_n)_{n \geq 2}$ est décroissante, minorée par 0 et donc convergente, d'après le théorème de la limite monotone. On pose $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Par continuité de $\ln$ et passage à la limite dans l'inégalité (*), on obtient :

$$0 \leq |1 + \ln(1 - \ell)| \leq 0, \text{ car } 0 \leq \ell \leq c < 1.$$

Donc $1 + \ln(1 - \ell) = 0, \ln(1 - \ell) = -1$, puis $\ell = 1 - e^{-1}$.

□

Exercice 47.

Suite implicite, Oral Math II 2026

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 1[$, on pose

$$f_n(x) = \frac{1}{2x} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - k^2}, \quad g_n(x) = \frac{1}{2x} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{1}{4} - k^2}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0, 1[$ notée u_n .

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{1}{4} - k^2} = \frac{-4n}{2n+1}$.

3. Soient $x \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ fixés. Comparer $f_n(x)$ et $g_n(x)$.

Montrer que : $u_n \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{8n}$.

Déterminer alors la limite de la suite $(u_n)_n$.

Solution. 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. La fonction f_n est dérivable (donc en particulier continue) sur $]0, 1[$ comme somme de fonctions usuelles dérivables sur ce même intervalles (inverses de fonctions affines qui ne s'annulent pas) et, pour tout $x \in]0, 1[$, on a

$$f'_n(x) = -\frac{1}{2x^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x - k^2)^2} < 0.$$

En particulier, f_n est strictement décroissante sur $]0, 1[$. Comme elle y est aussi continue, elle réalise une bijection (par le théorème de la bijection monotone aussi appelé corollaire du TVI) de $]0, 1[$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, 0 admet un unique antécédent par f_n , noté u_n .

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Observons, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, que

$$\frac{1}{\frac{1}{4} - k^2} = \frac{4}{1 - (2k)^2} = \frac{-4}{(2k+1)(2k-1)} = -2 \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right),$$

ce qui permet de faire apparaître un télescopage :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{1}{4} - k^2} &= 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1} \right) = 2 \left(\frac{1}{2n+1} - 1 \right) \\ &= \frac{-4n}{2n+1}, \end{aligned}$$

comme attendu.

Remarque. On pouvait aussi procéder par récurrence :

✕ **Initialisation.** Pour $n = 1$, on a $\sum_{k=1}^1 \frac{1}{\frac{1}{4} - k^2} = \frac{1}{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{4}{3}$, ce qui est bien la formule au rang $n = 1$.

✕ **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{1}{4} - k^2} = \frac{-4n}{2n+1}$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\frac{1}{4} - k^2} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{1}{4} - k^2} + \frac{1}{\frac{1}{4} - (n+1)^2} \stackrel{\text{H.R.}}{=} \frac{-4n}{2n+1} + \frac{4}{1 - (2(n+1))^2} \\ &= \frac{-4n}{2n+1} - \frac{4}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{-4}{2n+1} \times \frac{n(2n+3)+1}{2n+3} = \frac{-4(2n^2+3n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{-4(n+1)}{2n+3}, \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule au rang $n+1$ et termine la récurrence.

3. Soient $x \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ fixés. On a

$$f_n(x) - g_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{1}{4} - k^2} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{x - k^2} - \frac{1}{\frac{1}{4} - k^2} \right) = \left(\frac{1}{4} - x \right) \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k^2 - \frac{1}{4})(k^2 - x)}$$

dont le signe est celui de $x - \frac{1}{4}$. On a donc

$$f_n(x) \leq g_n(x) \iff x \leq \frac{1}{4}.$$

Comme

$$f_n\left(\frac{1}{4}\right) = 2 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{1}{4} - k^2} = 2 - \frac{4n}{2n+1} = \frac{2}{2n+1} > 0 = f_n(u_n)$$

et que f_n est strictement décroissante sur $]0, 1[$ (sa bijection réciproque aussi et) alors $u_n > \frac{1}{4}$, ce qui implique que

$$\frac{1}{2u_n} - \frac{4n}{2n+1} = g_n(u_n) < f_n(u_n) = 0,$$

ou encore

$$\frac{1}{2u_n} < \frac{4n}{2n+1} \iff u_n > \frac{2n+1}{8n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8n}.$$

De l'encadrement,

$$\frac{1}{4} < u_n < \frac{1}{4} + \frac{1}{8n},$$

on déduit, par théorème des gendarmes, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{4}$.

□