Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

10

Séries entières - Éléments de solution

5 Sélection d'exercices

Exercice 10.13.
Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes.

i. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^{2/3}}$ *ii.* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^{3/2}}$ *iii.* $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{(2n)!}x^n$

iv. $\sum_{n\geqslant 0} x^{2n}\sin(n\theta)$ *v.* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n}x^n$ *vi.* $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n}}{2^n+1}$

vii. $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)x^n$ *viii.* $\sum_{n\geqslant 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n$ *ix.* $\sum_{n\geqslant 0} (e^{\sqrt{n+1}}-e^{\sqrt{n}})x^n$

Solution.

i. On a $\left|\frac{x^n}{n^{2/3}}\right| \leq |x|^n$ donc le rayon de convergence est supérieur à celui de $\sum |x|^n$, soit $R \geq 1$ (on reconnait une série géométrique). Or pour $x=1$ la série diverge (par Riemann) : on a donc $R=1$. On aurait aussi pu utiliser d'Alembert.

ii. Pour $x=1$ la série converge (par Riemann) et pour $x>1$,

$$\frac{x^n}{n^{3/2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

(par croissances comparées) donc la série diverge si $|x|>1$. Cela prouve $R=1$. On aurait aussi pu utiliser d'Alembert.

iii. Si $x=0$, la série converge. Posons alors $u_n(x)=\frac{n^2}{(2n)!}x^n$.
On a :

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{(n+1)}{2(2n+1)n^2}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par d'Alembert on en déduit $R=+\infty$.

iv. Si $\theta \equiv k\pi\ [2\pi]$ le rayon est $+\infty$ car la série est nulle.
Sinon, on a $\left|x^{2n}\sin(n\theta)\right| \leq |x|^{2n}$ donc le rayon de convergence est supérieur à celui de $\sum |x^2|^n$, soit $R\geq 1$ (on reconnait une série géométrique). Or pour $x=1$ la série est grossièrement divergente. Cela prouve donc $R=1$.

v. On a : $\frac{|x|^n}{n} \underset{+\infty}{=} o\left(\left|\frac{\ln(n)}{n}x^n\right|\right)$ donc le rayon de convergence est inférieur à celui de $\sum \frac{|x|^n}{n}$, soit $R\leq 1$ (car on reconnait la primitive d'une série géométrique).

Enfin, pour $x=1$ la série diverge par comparaison avec une série de Riemann : on a $\frac{1}{n} \underset{+\infty}{=} o\left(\left|\frac{\ln(n)}{n}\right|\right)$.
On a donc $R=1$.

vi. On a $\frac{x^{2n}}{2^n+1} \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n > 0$, et $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n$ a pour rayon de convergence $\sqrt{2}$. On a donc $R=\sqrt{2}$.

vii. On a $\ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \sin\frac{1}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} > 0$. Or $\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n}$ a pour rayon de convergence 1, car sa série dérivée est $\sum_{n\geqslant 1} x^{n-1}$ qui est la série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} x^n$. Cela prouve $R=1$ (la dérivée est une série géométrique donc elle est de rayon 1).

viii. On a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n,+\infty}{=} \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n,+\infty}{=} \exp\left(1+o(1)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e > 0$. Or $\sum_{n\geqslant 0} ex^n$ a pour rayon de convergence 1. On en déduit $R=1$.

ix. On a :

$$\begin{aligned}(e^{\sqrt{n+1}}-e^{\sqrt{n}}) &= e^{\sqrt{n}}\left(e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}-1\right) = e^{\sqrt{n}}\left(e^{\sqrt{n}(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1)}-1\right)\\ &= e^{\sqrt{n}}\left(e^{\sqrt{n}(\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+o(\frac{1}{n^2})}-1\right) = e^{\sqrt{n}}\left(e^{\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}-\frac{1}{8n^{3/2}}+o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right)}-1\right)\\ &= e^{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}+\frac{1}{8n}-\frac{5}{48n^{3/2}}+o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right)\end{aligned}$$

Ainsi le terme général est équivalent à $u_n = \frac{e^{\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}}x^n$. On peut alors appliquer d'Alembert.
On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\sqrt{\frac{n}{n+1}}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.
Donc le terme général ne tend pas vers 0 pour $|x|\geqslant 1$, et pour $|x|<1$ la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc par équivalence, $\sum(e^{\sqrt{n+1}}-e^{\sqrt{n}})x^n$ l'est aussi.
Cela prouve $R=1$.

□

Exercice 10.14.
Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme des séries entières réelles suivantes sur l'intervalle ouvert de convergence.

i. $\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{2n}}{2^n}$ *ii.* $\sum_{n\geqslant 0}\left(n^2+n+1\right)x^n$ *iii.* $\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{3^n n}$

iv. $\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{2n}}{n!}$ *v.* $\sum_{n\geqslant 0}\sin(n\alpha)\,x^n$ *vi.* $\sum_{n\geqslant 0}\frac{\sin(n\alpha)}{n!}x^n$

vii. $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2-n+1}{n!}x^n$ *viii.* $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}k}x^n$ *ix.* $\sum_{n\geqslant 0} n^{(-1)^n}x^n$

Solution.

i. $\frac{x^{2n}}{2^n} = \left(\frac{x^2}{2}\right)^n$ est le terme général d'une série géométrique de raison $\frac{x^2}{2}$: le rayon de convergence est $R=\sqrt{2}$ et la somme est $\frac{2}{2-x^2}$.

ii. On prouve aisément par d'Alembert que $R=1$ (ou car la série est associée à une série géométrique) et on peut écrire

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n^2+n+1\right)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}x^n.$$

On reconnaît les séries dérivées successives de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ de quoi on déduit $S(x) = \dfrac{1+x^2}{(1-x)^3}$.

iii. On prouve aisément par d'Alembert que $R = 3$. Pour $x \in]-3,3[$ on a alors

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^{n} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}}.$$

En intégrant, comme $S(0) = 0$, on en déduit $S(x) = -\ln\left(1-\dfrac{x}{3}\right) = \ln\left(\dfrac{3}{3-x}\right)$.

iv. On a $R = +\infty$ par d'Alembert, et clairement $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\left(x^2\right)^n}{n!} = e^{x^2}$.

v. Si $\alpha = 0 \ [\pi]$ la somme est évidemment nulle et donc $R = +\infty$.
Si $\alpha \neq 0 \ [\pi]$, alors $a_n = \sin(n\alpha)$ définit une suite bornée (par 1), donc on a déjà $R \geq 1$. Or $a_n = \sin(n\alpha)$ ne tend pas vers 0 (exercice : montrer que cette suite n'a pas de limite!), donc il y a divergence grossière dans ce cas. On en déduit alors $R = 1$.
Dans ce cas, en utilisant la formule d'Euler

$$\sin(n\alpha) = \frac{e^{in\alpha} - e^{-in\alpha}}{2i},$$

on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\sin n\alpha)\, x^n = \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{i\alpha}x\right)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-i\alpha}x\right)^n\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-e^{i\alpha}x} - \frac{1}{1-e^{-i\alpha}x}\right).$$

Et après réduction au même dénominateur on obtient $S(x) = \dfrac{x\sin\alpha}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}$.

vi. On a $\left|\dfrac{\sin n\alpha}{n!}x^n\right| \leq \dfrac{1}{n!}|x|^n$ ce qui prouve $R \geq +\infty$ (on reconnait la série exponentielle), d'où $R = +\infty$.
On a alors avec les formules d'Euler :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin n\alpha}{n!}x^n = \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(e^{i\alpha}x\right)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(e^{-i\alpha}x\right)^n}{n!}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{e^{i\alpha}x} - e^{e^{-i\alpha}x}\right) = e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha).$$

vii. On a $R = +\infty$ par d'Alembert. Or on a

$$\frac{n^2-n+1}{n!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{n!},$$

et les deux séries ont un rayon infini, ce qui permet d'écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-n+1}{n!}x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-2)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = x^2\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + e^x = \left(x^2+1\right)e^x.$$

en reconnaissant une série exponentielle et sa dérivée seconde.

viii. $a_n = \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n} k} = \dfrac{2}{n(n+1)} = \dfrac{2}{n} - \dfrac{2}{n+1}$ en décomposant en éléments simples. La règle de d'Alembert permet de prouver que le rayon de la série est 1.
Pour $|x| < 1$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = 2\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}\right)$$

puisque toutes ces séries ont 1 comme rayon de convergence.
On a déjà $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ en reconnaissant une somme de référence.
De même, pour $x \neq 0$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{1}{x}\left(-\ln(1-x) - x\right).$$

On en déduit

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = 2\left(\frac{1-x}{x}\ln(1-x)+1\right)$$

pour tout $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$, et par ailleurs on a directement $S(0)=0$.

ix. Pour $n=2p$ pair, $n^{(-1)^n}x^n = 2px^{2p}$, et pour $n=2p+1$ impair, $n^{(-1)^n}x^n = \dfrac{x^{2p+1}}{2p+1}$.
Ces deux séries extraites (la somme des termes pairs et la somme des termes impairs) ont un rayon de convergence 1, et pour $x=1$ le terme général $n^{(-1)^n}$ ne tend pas vers 0 : cela prouve $R=1$.
On peut calculer les sommes des deux séries extraites séparément.
On a $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} 2px^{2p} = x\sum_{p=1}^{+\infty} 2px^{2p-1}$, ce qui permet de reconnaître la dérivée d'une série géométrique. On en déduit

$$\sum_{p=0}^{+\infty} 2px^{2p} = \frac{-2x^2}{(1-x^2)^2}.$$

Par ailleurs $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{2p+1}$ est la primitive d'une série géométrique, d'où en intégrant :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{2p+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Finalement on a prouvé $S(x) = \dfrac{-2x^2}{(1-x^2)^2} + \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

□

Exercice 10.15.

Déterminer le développement en série entière des fonctions suivantes, où x est un réel. Préciser à chaque fois sur quel intervalle le développement est valable.

i. $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ *ii.* $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{2+x}\right)$ *iii.* $f(x) = \ln\left(2-x^2\right)$

iv. $f(x) = e^{x/2}\mathrm{sh}x$ *v.* $f(x) = \sin(x)\,\mathrm{sh}(x)$ *vi.* $f(x) = \arcsin x$

vii. $f(x) = \sin^2(2x)$ *viii.* $f(x) = \dfrac{2x-1}{(2+x-x^2)^2}$

Solution. À chaque fois on transforme l'expression considérée pour faire apparaître des fonctions dont on connait le DSE.

i. f n'étant pas définie en $x=3$, le développement, s'il existe, a pour rayon au plus 3. Sur $]-3,3[$ on peut alors écrire

$$f(x) = -\frac{1}{3}.\frac{1}{1-x/3} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{3^n} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}},$$

dont le rayon de convergence est effectivement 3 (car on connait celui de la série géométrique).

ii. L'ensemble de définition de f est $]-2,1[$ donc le rayon de convergence d'un éventuel développement est au plus 1. Sur $]-1,1[$ on a

$$f(x) = \ln(1-x) - \ln 2 - \ln(1+x/2) = -\ln 2 - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n-(-1)^n}{2^n n}x^n$$

dont le rayon de convergence est effectivement 1 (car on connait celui de la série logarithmique).

iii. $f(x) = \ln\left(2-x^2\right) = \ln 2 + \ln\left(1-\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\right) = \ln 2 - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n\,2^n}$ sur $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$.

iv. On utilise la série exponentielle :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(e^{3x/2} - e^{-x/2}\right) = \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n - (-1)^n}{2^{n+1} n!} x^n$$

dont le rayon de convergence est infini. On aurait aussi pu faire un produit de Cauchy mais c'est beaucoup moins agréable!

v. En utilisant la formule d'Euler du sinus on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4i}\left(e^{(1+i)x} - e^{(1-i)x} - e^{(-1+i)x} + e^{(-1-i)x}\right) \\ &= \frac{1}{4i}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}\left[(1+i)^k - (1-i)^k - (-1+i)^k + (-1-i)^k\right] \\ &= \frac{1}{4i}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}\left(1 + (-1)^k\right)\left[(1+i)^k - (1-i)^k\right] \end{aligned}$$

Or $\left(1 + (-1)^k\right) = \begin{cases} 0, & \text{si } k \text{ est impair} \\ 2, & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$ d'où

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2i}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!}\left[(1+i)^{2p} - (1-i)^{2p}\right] \text{ après avoir posé } k = 2p \\ &= \frac{1}{2i}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!}\left[(2i)^p - (-2i)^p\right] \\ &= \frac{1}{2i}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!}\left(1 - (-1)^p\right) 2^p\, i^p \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n+1}\,(-1)^n}{(4n+2)!}\, x^{4n+2} \text{ après avoir posé } p = 2n+1 \text{ et car } i^{2n} = (-1)^n \end{aligned}$$

On aurait aussi pu faire un produit de Cauchy mais c'est plus compliqué.

vi. On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}\left(-x^2\right)^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (-1)^n \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\cdots(\frac{1}{2}+n-1)}{n!} x^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!} x^{2n} \end{aligned}$$

avec rayon de convergence 1.
Donc, par intégration, $\forall x \in]-1,1[$,

$$\arcsin(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!(2n+1)} x^{2n+1}.$$

On peut simplifier un peu en écrivant I_{2n-1} désigne le produit des entiers impairs inférieurs à $2n-1$. En raisonnant comme pour l'intégrale de Wallis, on peut prouver $I_{2n-1} = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$. D'où le résultat :

$$\forall x \in]-1,1[, \arcsin(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{4n}((n)!)^2(2n+1)} x^{n+1}.$$

vii. On a $f(x)=\sin^2(2x)=\dfrac{1-\cos(4x)}{2}$. Et en utilisant le développement en série entière de cos, dont le domaine de validité est $\mathbb{R}$, on obtient

$$f(x)=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{4^{2n}x^{2n}}{(2n)!}.$$

viii. Remarquons d'abord que $2+x-x^2=(1+x)(2-x)$: f n'est pas définie en (-1) et en 2, et donc si un développement en série entière existe, son rayon de convergence est au plus 1. Plaçons nous donc sur $]-1,1[$.
On remarque ensuite que $f(x)=F'(x)$ avec

$$F(x)=\frac{1}{(1+x)(2-x)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2-x}\right)$$

après décomposition en éléments simples.
Or $x\longmapsto\dfrac{1}{1+x}$ et $x\longmapsto\dfrac{1}{2-x}$ sont développables en série entière sur $]-1,1[$, donc F l'est aussi, et par suite f l'est encore.
On a alors

$$F(x)=\frac{1}{6}\left(2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n x^n\right)=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[2(-1)^n+\frac{1}{2^n}\right]x^n,$$

puis en dérivant :

$$f(x)=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\left[2(-1)^{n+1}+\frac{1}{2^{n+1}}\right]x^n$$

sur $]-1,1[$.

□

Exercice 10.16. **Oral Mines-Télécom 2023**

Exprimer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^3x^n}{n!}$ à l'aide de fonctions usuelles.

Solution. Comme le fait de multiplier les coefficients d'une série entière par n ne change pas le rayon de convergence (le faire trois fois de suite non plus) et en reconnaissant initialement une série exponentielle, on conclut que cette série entière a pour rayon de convergence $R=+\infty$.
On écrit alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^3x^n}{n!} &= x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2x^{n-1}}{(n-1)!}=x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)^2x^n}{n!}\\ &= x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+2n+1}{n!}x^n=x\left(x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n-1)!}+2x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\\ &= x\left(x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n-1)!}+2x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\right)=x^3e^x+3x^2e^x+xe^x.\end{aligned}$$

□

Exercice 10.17.

Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}a_nz^n$ où a_n est le nombre de diviseurs de l'entier n.

Solution. Le nombre de diviseurs d'un entier naturel n est supérieur ou égal à 1, inférieur ou égal à n. Donc $1\leqslant a_n\leqslant n$. Les séries $\sum z^n$ et $\sum nz^n$ ont pour rayon de convergence 1 (la première est géométrique, la seconde lui est associée), donc par encadrement, le rayon cherché est 1. □

Exercice 10.18. **Oral Mines-Telecom 2018**

1. Déterminer la nature des séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(u_n-\frac{1}{n}\right)$, où $u_n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

2. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1}u_nx^n$.

3. Déterminer K tel que $\left|u_n - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{K}{n^2}$.

Solution.

1. Il s'agit d'une série de Riemann avec $\alpha = 1$: elle est donc divergente. Si on veut le redémontrer, le plus simple est de faire une comparaison série/intégrale.
Il suffit d'utiliser le $DL_1(0)$ de $\ln(1+x)$ qui donne :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

soit $u_n - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.

Par comparaison avec une série de Riemann convergente, on en déduit que $\sum_{n\geq 1}\left(u_n - \frac{1}{n}\right)$ converge.

2. On déduit du DL ci-dessus que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, et par ailleurs la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}x^n$ est de rayon $R = 1$ car elle est associée à une série géométrique. Donc, par le théorème de comparaison, $\sum_{n\geq 1} u_n x^n$ est également de rayon 1.

3. On a pour tout $x \in]-1,1[$: $\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}$. Si $x \in [0,1[$, on voit qu'il s'agit d'une série alternée. Ainsi, si on pose $S_N = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}$, on a par théorème :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ S_{2N+1} \leq \ln(1+x) \leq S_{2N},$$

car les deux suites $(S_{2N})_N$ et $(S_{2N+1})_N$ sont adjacentes et convergent vers $\ln(1+x)$.
En particulier, pour $N = 0$ il vient

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x \iff -\frac{x^2}{2} \leq\leq 0.$$

On en déduit $|\ln(1+x) - x| \leq \frac{x^2}{2}$. En prenant $x = \frac{1}{n}$ on voit alors que $K = \frac{1}{2}$ convient.

□

Exercice 10.19.

1. Pour tout $x \neq 0$, on pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{sh}x - x}{x^3}$.
Montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et déterminer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Déterminer le développement en série entière de $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{sh}t - t}{t^3}\mathrm{d}t$.

Solution.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a

$$\frac{\mathrm{sh}(x) - x}{x^3} = \frac{1}{x^3}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - 1\right) = \frac{1}{x^3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2(n-1)}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n+3)!}.$$

f admet ainsi un développement en série entière sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, donc elle se prolonge donc en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En effet, en posant $f(0) = \frac{1}{3!}$ (la valeur de la série entière en 0), on obtient que la relation

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n+3)!}$$

est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc ainsi prolongée f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Par unicité des cœfficients du développement en série entière, on en déduit pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f^{(2n+1)}(0) = 0$ et

$$f^{(2n)}(0) = \frac{(2n)!}{(2n+3)!} = \frac{1}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)}.$$

2. Il suffit d'appliquer le théorème d'intégration, en remarquant que $g(0) = 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) - 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+3)!}.$$

□

Exercice 10.20.

1. Montrer que $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1-t}{1+t^2}\mathrm{d}t$ est développable en série entière et donner son rayon de convergence.

2. Calculer $F(1)$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.

Solution.

1. On a déjà

$$F(x) = \int_0^x \frac{1-t}{1+t^2}\mathrm{d}t = \left[\arctan t - \frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)\right]_0^x = \arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Or pour $x \in]-1,1[$ on a

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

et $x^2 \in [0,1[$ donc

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+2}$$

(ce sont des séries de référence). Il en découle que F est développable en série entière (au moins) sur $]-1,1[$, et ce développement s'écrit par linéarité :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Notons u_n le terme général de cette série. Pour $x \neq 0$ on a

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{n+1}{n+2}|x| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|$$

donc, par d'Alembert, on peut conclure que le rayon de convergence est 1.

2. On a prouvé à la question ci-dessus la relation :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad F(x) = \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+2}.$$

La première expression de $F(x)$ est valable sur $[-1,1]$, et y définit une fonction continue. La seconde expression (la différence de séries) est valable et continue sur $]-1,1[$, et par ailleurs elle est définie en $x = 1$ (on reconnait deux séries alternées dans ce cas). Par théorème, on en déduit qu'elle est également continue en $x = 1$. On peut donc faire tendre x vers 1 dans cette égalité.

On en déduit déjà $F(1) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln(2)$, mais encore en utilisant la continuité des séries en $x = 1$:

$$\begin{aligned} F(1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+2} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}. \end{aligned}$$

On a ainsi $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$.

□

Exercice 10.21. **Oral Math II 2022**

On considère les fonctions d'une variable réelle définies par

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} \quad \text{et} \quad h : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x)^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{x-1}{x} \right)^n.$$

1. a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière dont f est la somme.
b. En déduire l'ensemble de définition de la fonction f.
c. Pour tout $x \in]-R, R[$, exprimer $xf'(x)$ avec des fonctions usuelles.

2. a. Déterminer l'ensemble de définition I de h.
b. Montrer que h est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intérieur de I.
c. Exprimer h avec les fonctions usuelles.

Solution.

1. a. Diviser les coefficients par n d'une série entière ne change pas le rayon de convergence. En le faisant deux fois à partir de la série géométrique, on a donc encore une série entière de rayon de convergence $R = 1$.
b. Pour $x = 1$ et $x = -1$ on a deux séries absolument convergentes (Riemann), donc f est définie (et continue) sur $[-1, 1]$.
c. Soit $x \in]-1, 1[$. On a

$$\begin{aligned} xf'(x) &= x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x t^{n-1} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} t^{n-1} \right) \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} \\ &= -\ln(1-x). \end{aligned}$$

2. a. On a

$$\begin{cases} |1-x| \leq 1 \\ \left| \dfrac{x-1}{x} \right| \leq 1 \end{cases} \iff \frac{1}{2} < x \leq 2$$

donc $I = \left[\frac{1}{2}, 2\right]$.
b. Pour $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, on peut écrire

$$h(x) = f(1-x) + f\left(\frac{x-1}{x} \right) \qquad (*)$$

Comme $x \mapsto 1-x$ et $xx \mapsto \dfrac{x-1}{x}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]\frac{1}{2}, 2\right[$ à valeurs dans $]-1, 1[$ et que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$, on a bien que h est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, 2[$ par composition.

c. On dérive la relation $(*)$ et on utilise le résultat de **1.c.** On a, pour $x \in \left]\frac{1}{2}, 2\right[$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= -f'(1-x) + \frac{1}{x^2} f'\left(1-\frac{1}{x}\right) = \frac{(1-x)f'(1-x)}{x-1} + \frac{x}{x-1} \times \left(1-\frac{1}{x}\right) f'\left(1-\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x-1}\left(-\ln(1-(1-x)) - \frac{1}{x}\ln\left(1-1+\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \frac{-x\ln(x)+\ln(x)}{x(x-1)} = -\frac{\ln(x)}{x}. \end{aligned}$$

On primitive. Comme $h(1) = f(0) + f(0) = 0$,

$$h(x) = -\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\ln(x)^2.$$

□

Exercice 10.22.

Montrer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1}\mathrm{d}x = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$.

Solution. Puisque $-1 < e^{-x} < 1$, on peut développer $\dfrac{1}{1-e^{-x}}$ en série entière, ce qui donne :

$$\frac{x^2}{e^x-1} = \frac{x^2e^{-x}}{1-e^{-x}} = x^2e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \sum_{n=1}^{+\infty} x^2e^{-nx}.$$

Posons $f_n : x \mapsto x^2e^{-nx}$. f_n est continue sur $[0,+\infty[$, et on montre aisément qu'elle y est intégrable en effectuant deux intégrations par parties successives (à chaque fois les crochets ont une limite finie) :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^2e^{-nx}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} x^2\left(-\frac{1}{n}e^{-nx}\right)'\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{n}x^2e^{-nx}\right]_0^{+\infty} + \frac{2}{n}\int_0^{+\infty} xe^{-nx}\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{n}\int_0^{+\infty} x\left(-\frac{1}{n}e^{-nx}\right)'\mathrm{d}x = \frac{2}{n}\left(\left[-\frac{1}{n}xe^{-nx}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-nx}\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{2}{n^2}\int_0^{+\infty} e^{-nx}\mathrm{d}x = \frac{2}{n^2}\left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{n^3}. \end{aligned}$$

Comme f_n est à valeurs positives, on en déduit que la série $\sum\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\mathrm{d}t$ converge car c'est une série de Riemann avec $3 > 1$. On peut alors appliquer le théorème d'intégration terme à terme qui donne :

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{e^x-1}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} x^2e^{-nx}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^2e^{-nx}\mathrm{d}x = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}.$$

D'où le résultat. □

Exercice 10.23.

1. On suppose $\forall n, a_n > 0$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Que peut-on dire du rayon de $\sum a_nx^n$ et de $\sum a_n\dfrac{x^n}{n!}$?

2. On suppose avoir $M > 0$ tel que $\forall n, 0 < a_n < M$. Que peut-on dire du rayon de $\sum a_nx^n$ et de $\sum a_n\dfrac{x^n}{n!}$?

Solution.

1. $(|a_n|)$ est bornée, donc le rayon de $\sum a_nx^n$ est $\geqslant 1$ (on ne peut rien dire de plus $a_n = \dfrac{1}{n}$ donne un rayon égal à 1 et $a_n = \dfrac{1}{n!}$ donne un rayon infini.

Pour $\sum a_n\dfrac{x^n}{n!}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\left(\dfrac{|a_nz^n|}{n!}\right)$ converge vers 0 (par produit de suites de limites nulles). Le rayon est infini (par le lemme d'Abel).

2. Le rayon de $\sum a_n x^n$ est supérieur à 1 car $(|a_n|)$ est bornée. On ne peut rien dire de plus.
Le rayon de $\sum a_n \dfrac{x^n}{n!}$ est infini, toujours car $\left(\dfrac{|a_n z^n|}{n!}\right)$ tend vers 0.

□

Exercice 10.24.

Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = \dfrac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^{2n+1}$.

2. Montrer que cette série entière est solution sur $]-R, R[$ de l'équation différentielle:
$$(1-x^2)y' - xy = 1.$$

3. Pour $x \in]-R, R[$, déterminer une nouvelle expression de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$.

Solution.

1. Pour $x = 0$, la série converge.
Pour $x \neq 0$, on pose $u_n = a_n x^{2n+1}$. On a
$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{4(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)}|x^2| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x^2.$$
Donc, par la règle de d'Alembert, si $|x|<1$, $\sum a_n x^{2n+1}$ converge absolument, et si $|x|>1$ alors $\sum a_n x^{2n+1}$ diverge grossièrement.
Donc $R = 1$.

2. La fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.
Soit $x \in]-1,1[$. On a $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} x^{2n}$, d'où:
$$\begin{aligned}(1-x^2)f'(x) - xf(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} x^{2n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+2} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} x^{2n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n-2)!} x^{2n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n-1)!} x^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} - \frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n-2)!} - \frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n-1)!} \right) x^{2n}\end{aligned}$$
Or
$$\frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} - \frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n-2)!} - \frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n-1)!} = \frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!}(4n^2 - 2n(2n-1) - 2n) = 0.$$
Donc $(1-x^2)f'(x) - xf(x) = 1$ pour tout $x \in]-1,1[$.

3. On remarque $f(0) = 0$. Par le théorème d'existence et d'unicité, on sait que l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 1$ admet une unique solution sur $]-1,1[$ telle que $y(0) = 0$.
On vient donc de prouver que f est cette unique solution. On résout l'équation différentielle pour déterminer f.
La solution générale de l'équation homogène est $y(x) = \dfrac{K}{\sqrt{1-x^2}}$, où $K \in \mathbb{R}$.
On cherche une solution particulière sous la forme $f(x) = \dfrac{\lambda(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, avec $\lambda(0) = 0$. En reportant dans l'équation, on obtient f est solution si et seulement si $(1-x^2)\dfrac{\lambda'(x)}{\sqrt{1-x^2}} = 1$ et $\lambda(0) = 0$.

Ce qui équivaut à $\lambda'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\lambda(0) = 0$ c'est-à-dire $\lambda(x) = \arcsin(x)$.

Finalement $\forall x \in]-1,1[, f(x) = \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

□

Exercice 10.25.

Pour x réel, on pose : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.
2. Étudier la convergence de la série entière en 1 et en -1.
3. Établir la continuité de f en -1.
4. Déterminer la limite de f en 1.

Solution.

1. Posons $u_n(x) = \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$. Pour $x \neq 0$, on a

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}|x| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|.$$

Ainsi, par d'Alembert, si $|x| < 1$, la série converge absolument et elle diverge si $|x| > 1$, on en déduit que $R = 1$.

2. Pour $x = 1$ c'est une série de Riemann divergente. Pour $x = -1$, on applique le critère spécial des séries alternées (CSSA) pour voir que la série converge.

3. Étant définie en -1, la fonction f y est continue par théorème du cours.

4. Soit $x \in [0,1[$. On a

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x t^{n-1}\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} t^{n-1}\right)\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = -\ln(1-x) \underset{x\to1^-}{\longrightarrow} +\infty.$$

Par comparaison, $f(x) \to +\infty$ lorsque $x \to 1^-$.

□

Exercice 10.26.

On considère la série entière $\sum_{n\geq 2} (-1)^n \ln(n) x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière. On note S sa somme.
2. Montrer que

$$\forall x \in]-1;1[, S(x) = \frac{1}{1+x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) x^{n+1}\right).$$

3. En déduire que S admet une limite en 1^-et que

$$\lim_{x\to1^-} S(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right).$$

4. En utilisant la formule de Wallis ci dessous

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times\cdots\times(2n)}\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

calculer la limite de S en 1^-.

Solution.

1. Par d'Alembert $\dfrac{\ln(n)}{\ln(n+1)} \underset{n\to+\infty}{1}$ donc $R = 1$.

2. Pour $x \in]-1;1[$, on a

$$(1+x)S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \ln(n)x^n + \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \ln(n)x^{n+1} = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\ln(k+1)x^{k+1} - \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln(n)x^{n+1},$$

ce qui donne bien

$$(1+x)S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}(\ln(n+1)-\ln(n))x^{n+1},$$

et qui est bien la formule attendue.

3. Posons, pour $x \in [0,1]$,

$$f_n(x) = (-1)^{n+1}(\ln(n+1)-\ln(n))x^{n+1} = (-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^{n+1}.$$

Toujours par d'Alembert, la série entière $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est bien convergente pour $x \in [0,1[$. De plus, comme la suite $\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)_{n\geq 1}$ est à valeurs positives, décroissante vers 0, le CSSA s'applique et la série $\sum f_n(1)$ est convergente. En particulier, la fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est continue en 1. Il suit, comme $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est également continue en 1 (qui vaut 1/2), il suit que S admet une limite en 1^-et que

$$\lim_{x\to 1^-} S(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(1) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right).$$

4. En regroupant les termes d'indices impairs et pairs consécutifs

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{2k-1}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{2k}\right)\right]$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k-1}\frac{2k}{2k+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{2n+1}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k-1}\right)^2\right)$$

Enfin par la formule du Wallis, on obtient

$$\lim_{x\to 1^-} S(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2}$$

□

Exercice 10.27. **Oral Math I 2022**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale $I_n = \int_0^\pi \sin^{2n}(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer avec une intégration par parties que $I_n = \dfrac{\pi(2n)!}{4^n(n!)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $f_t : x \mapsto \cos(x\sin(t))$ est développable en série entière et indiquer le rayon de convergence de la série entière obtenue.

3. En déduire le développement en série entière de $F : x \mapsto \int_0^\pi \cos(x\sin(t))\mathrm{d}t$.

Solution.

1. On reconnait une intégrale de Wallis. On a déjà fait cet exercice mais on en repropose une preuve succincte. Tout repose sur le fait que $\sin^2 = 1 - \cos^2$ et que $\cos^2 = \cos \cdot \cos$. En effet

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^\pi \sin^{2n+2}(t)\mathrm{d}t = \int_0^\pi \sin 2n(t)\mathrm{d}t - \int_0^\pi \cos(t)\cos(t)\sin^{2n}(t)\mathrm{d}t \\ &= I_n - \left[\frac{\cos(t)\sin^{2n+1}(t)}{2n+1}\right]_0^\pi - \frac{1}{2n+1}I_{n+1} \\ &= I_n - \frac{1}{2n+1}I_{n+2}, \end{aligned}$$

ce qui se réécrit

$$I_{n+1}\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) = I_n \iff I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}I_n.$$

Comme $I_0 = \pi$, une récurrence donne alors bien $I_n = \dfrac{\pi(2n)!}{4^n(n!)^2}$.

2. La fonction cos étant DSE sur $\mathbb{R}$, on peut écrire, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n}.$$

En prenant $\theta = \sin(t)x$, on a

$$\cos(x\sin(t)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin^{2n}(t)}{(2n)!}x^{2n},$$

et cette série converge, si $t \in \mathbb{R}$ est quelconque est fixé, pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $x \mapsto \cos(x\sin(t))$ est bien DSE sur $\mathbb{R}$ donc $R = +\infty$.

3. Posant $g_{n,x} : t \mapsto \frac{(-1)^n \sin^{2n}(t)}{(2n)!}x^{2n}$, on veut faire une permutation série/intégrale. On sait déjà que $g_{n,x}$ est intégrable sur $[0,\pi]$ (c'est une fonction continue sur un segment) et que

$$g : \ t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} g_{n,x}(t) = \cos(\sin(t)x)$$

est continue sur $[0,\pi]$ par composition de telles fonctions. Il reste à vérifier que la série

$$\sum_{n\geq 0}\int_0^\pi |g_{n,x}(t)|\mathrm{d}t$$

est convergente. Or, par la Question **1.**,

$$\int_0^\pi |g_{n,x}(t)|\mathrm{d}t = \frac{I_n}{(2n)!}|x|^{2n} = \frac{\pi(2n)!}{4^n(n!)^2(2n)!}|x|^{2n} = \frac{\pi}{4^n(n!)^2}|x|^{2n},$$

qui est bien, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le terme général d'une série convergente (il suffit de comparer à de l'exponentielle ou de faire d'Alembert). On peut donc écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^\pi \cos(\sin(t)x)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\pi}{4^n(n!)^2}x^{2n}.$$

□