



5

Des séries et des hommes - Éléments de Solution

6 Sélection d'exercices

Exercice 5.13.

Étudier la convergence et calculer la somme de la série de terme général u_n dans les cas suivants:

$$i. u_n = \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} \quad ii. u_n = \ln \left(\frac{\ln^2(n+1)}{\ln(n)\ln(n+2)} \right) \quad iii. u_n = \frac{5}{(n+1)!}.$$

Solution.

i. La décomposition en éléments simples donne $u_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3(n+1)+1} \right)$: la somme est télescopique.

On peut ainsi calculer S_n , puis en passant à la limite on trouve $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{3}$.

ii. Pour $n \geq 2$, u_n est bien défini et on remarque

$$u_n = 2 \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(n+2)) = (\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n))) + (\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n+2))).$$

On reconnaît ainsi deux sommes télescopiques, et on en déduit

$$\sum_{n=2}^N u_n = \ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln(2)) + \ln(\ln(3)) - \ln(\ln(N+2)).$$

Or $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\ln(N+1)}{\ln(N+2)} = 1$, donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=2}^p u_n = \ln(\ln(3)) - \ln(\ln(2))$. La série converge et sa somme vaut $\ln(\ln(3)) - \ln(\ln(2))$.

iii. On a

$$\sum_{n=0}^N u_n = 5 \sum_{n=0}^N \frac{1}{(n+1)!} = 5 \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n!} = 5 \left(\sum_{n=0}^{N+1} \frac{1}{n!} - 1 \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 5(e-1).$$

□

Exercice 5.14.

Déterminer la nature de chacune des séries

$$i. \sum_{k \geq 2} \ln \left(1 + \frac{1}{k\sqrt{k}} \right), \quad ii. \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^2 \ln(k)}, \quad iii. \sum_{k \geq 0} \left(\exp \left(\frac{k^2+1}{k^4+1} \right) - 1 \right).$$

$$iv. \sum_{k \geq 1} \left((k+1)^{1/4} - (k-1)^{1/4} \right), \quad v. \sum_{k \geq 1} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{k^2} \right)^k \right).$$

$$vi. \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + \sqrt{n}}, \quad vii. \sum_{n \geq 1} n \ln \left(\frac{1 + \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \right), \quad viii. \sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^{3/2}}, \quad ix. \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$$

Exercice 5.15.

Étudier la nature des séries de terme général u_n dans chacun des cas suivants :

$$\begin{array}{llll}
 i. u_n = \ln\left(\frac{1}{n}\right) & ii. u_n = e^{-n^2} & iii. u_n = e^{-\sqrt{n}} & iv. u_n = 2^n \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) \\
 v. u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n & vi. u_n = \frac{1}{n} \left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}\right) & vii. u_n = \frac{(n!)^3}{(4n)!} & viii. u_n = \frac{(-1)^n}{(\ln(n))^n} \\
 ix. u_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n \cdot 5^n} & x. u_n = \int_0^{1/n} \frac{\sin t}{1 + \sqrt{t}} dt & xi. u_n = \frac{2^n}{n^2} (\sin \beta)^{2n} & xii. u_n = \frac{\alpha^n}{1 + \alpha^{2n}}
 \end{array}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Solution.

- i. On a $u_n = \ln\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$ donc la série diverge (très) grossièrement.
- ii. On a $0 \leq u_n \leq e^{-n}$, donc la série est à termes positifs, et par comparaison avec une série géométrique convergente (de raison $\frac{1}{e}$), il vient que $\sum u_n$ converge.
- iii. On a $u_n = e^{-\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série converge (absolument) par le théorème de comparaison par négligeabilité.
- iv. On effectue un développement asymptotique de l'exponentielle, car $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$:

$$\begin{aligned}
 u_n &= 2^{n-1} \left(e^{1/n} - e^{-1/n}\right) \\
 &= 2^{n-1} \left(\frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
 &\underset{+\infty}{\sim} \frac{2^n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty
 \end{aligned}$$

Donc la série diverge grossièrement.

- v. On effectue un développement asymptotique:

$$\begin{aligned}
 u_n &= e - e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\
 &\underset{+\infty}{=} e - e^{n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\
 &\underset{+\infty}{=} e \left(1 - e^{-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}\right) \\
 &\underset{+\infty}{=} e \left(\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
 &\underset{+\infty}{\sim} \frac{e}{2n}
 \end{aligned}$$

On en déduit, par théorème de comparaison avec une série de Riemann, que la série diverge.

- vi. On effectue un développement asymptotique:

$$\begin{aligned}
 u_n &= \frac{1}{n} \left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}\right) \\
 &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
 &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n(n+1)} + \frac{2n+1}{2n^2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
 &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
 &\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}
 \end{aligned}$$

Donc la série converge, par théorème de comparaison avec une série de Riemann.

vii. On a $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^3}{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1$ donc la série converge par la règle de d'Alembert.

viii. On peut montrer aisément qu'il s'agit d'une série alternée, car $v_n = \frac{1}{(\ln(n))^n}$ est décroissante, et donc qu'elle converge. Si on n'y pense pas, on peut procéder autrement : on a $n^2 = e^{2\ln(n)}$ et $(\ln(n))^n = e^{n \ln(\ln(n))}$.

Or pour n assez grand on a $\ln(\ln(n)) \geq 2$ et $n \geq \ln n$ donc $0 \leq \frac{1}{(\ln(n))^n} \leq \frac{1}{n^2}$. Par comparaison à une série de Riemann, cette série est donc absolument convergente.

ix. On a $u_n > 0$. Par d'Alembert,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{5} \cdot \frac{(2n+2)(2n+1)n}{(n+1)^3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{5} < 1$$

donc la série converge.

x. On a $0 \leq \sin t \leq t$ et $\frac{1}{1+\sqrt{t}} \leq 1$ pour tout $t \geq 0$, donc par croissance de l'intégrale $0 \leq u_n \leq \int_0^{1/n} \frac{1}{1+\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2n^2}$. Cela prouve que la série converge, par comparaison à une série de Riemann.

xi. On a déjà $u_n = \frac{(2 \sin^2 \beta)^n}{n^2}$.

Pour $a > 1$ on a $n^2 \underset{+\infty}{=} o(a^n)$, donc si $a = 2 \sin^2 \beta > 1$ la série diverge grossièrement.

Par contre, si $2 \sin^2 \beta \leq 1$ alors $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$ et la série converge par comparaison avec une série de Riemann.

Finalement la série converge si et seulement si $\beta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

xii. $u_n = \frac{\alpha^n}{1 + \alpha^{2n}}$: si $|\alpha| < 1$ alors

$$\alpha^{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} |\alpha|^n$: la série converge absolument par comparaison avec une série géométrique.

Si $|\alpha| > 1$ alors

$$\alpha^{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

et par suite $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{|\alpha|^n}$: cette fois encore la série converge absolument par comparaison avec une série géométrique.

Enfin si $|\alpha| = 1$ alors $|u_n| = \frac{1}{2}$: la série diverge grossièrement.

□

Exercice 5.16.

Montrer que la série $\sum (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ converge. Est-elle absolument convergente ?

Solution. On vérifie aisément que la suite (u_n) définie par $u_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ décroît vers 0, c'est donc une série alternée, qui converge par théorème de cours.

Par contre il n'y a pas convergence absolue, puisque $|(-1)^n u_n| = \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, et $\sum \frac{1}{n}$ diverge par Riemann. □

Exercice 5.17.

Oral Math II 2021

Soit $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles la série $\sum u_n$ converge.
2. Pour ces valeurs, trouver sa somme et un équivalent simple du reste d'ordre N .

Solution.

1. On procède par analyse-synthèse.

✕ **Analyse.** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\sum u(n)$ converge.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n = \sqrt{n} \left[1 + a\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + b\sqrt{1 + \frac{2}{n}} \right] \underset{+\infty}{=} \sqrt{n} \left[1 + a + b + \frac{a+2b}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right].$$

Supposons que $1 + a + b \neq 0$. Dans ce cas, $u_n \underset{+\infty}{\sim} (1 + a + b)\sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pm\infty$: impossible car $\sum u_n$ converge.

Donc, nécessairement $1 + a + b = 0$ et $u_n \underset{+\infty}{=} \frac{a+2b}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Supposons que $a + 2b \neq 0$. Dans ce cas, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{a+2b}{2\sqrt{n}}$ de signe constant : par comparaison de séries à termes de signe constant, cela contredit que $\sum u_n$ converge car la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ diverge. Donc, par l'absurde, $a + 2b = 0$.

Finalement,

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ a + 2b = 0 \end{cases}$$

et donc $(a, b) = (-2, 1)$.

✕ **Synthèse.** Si $(a, b) = (-2, 1)$, alors on a :

$$u_n = \sqrt{n} \left[1 - 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \underset{+\infty}{=} \sqrt{n} \left[-2 \times \frac{-1}{8n^2} + \frac{-4}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right].$$

On a alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{-1}{4n^{\frac{3}{2}}} < 0$ et la série $\sum u_n$ converge par critère de comparaison pour des séries à termes négatifs.

En conclusion, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $(a, b) = (-2, 1)$.

2. On prend donc $a = -2$ et $b = 1$. On a alors $u_n = \sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}$, et pour $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N u_n &= \sum_{n=0}^N [\sqrt{n} - \sqrt{n+1}] + \sum_{n=0}^N [\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}] \\ &= 0 - \sqrt{N+1} + \sqrt{N+2} - 1 \quad \text{par télescopage} \\ &= \sqrt{N} \left[-\left(1 + \frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 + \frac{2}{N}\right)^{\frac{1}{2}} \right] - 1 \\ &= -1 + \frac{1}{2\sqrt{N}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \end{aligned}$$

Par passage à la limite, on obtient $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = -1$.

De plus, $R_N = S - S_N \sim -\frac{1}{2\sqrt{N}}$.

□

Exercice 5.18.

On cherche l'ensemble des couples $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que la série $\sum \frac{a^k}{1+b^k}$ soit convergente.

1. Montrer que si $0 < a < b$, alors la série est convergente.
2. On considère $0 < b \leq a$.
 - a. Traiter les cas $b < 1$ et $b = 1$.
 - b. Que se passe-t-il pour $b > 1$?

Solution.

1. Si $0 < a < b$ alors $0 \leq \frac{a^k}{1+b^k} \leq \left(\frac{a}{b}\right)^k$ et on compare à une série géométrique convergente pour obtenir la conclusion souhaitée.
2. a. Si $b = 1$ alors $\frac{a^k}{1+b^k} = \frac{a^k}{2}$ et comme $a \geq 1$ la série est divergente. Si $b < 1$, $b^k \rightarrow 0$ et $\frac{a^k}{1+b^k} \sim a^k$. Si $a < 1$, la série converge ; si $a \geq 1$, la série diverge.
- b. Si $b > 1$, on a $\frac{a^k}{1+b^k} \sim \left(\frac{a}{b}\right)^k$ et la série diverge par comparaison à une série géométrique divergente.

**Exercice 5.19.****Oral Mines-Télécom 2024**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+, f''(x) < 0$ et $f'(x) \geq 0$.

1. Montrer que la suite $(f'(n))_{n \geq 1}$ converge.
2. Montrer que : $\forall x \geq 1, f(x+1) - f(x) \leq f'(x) \leq f(x) - f(x-1)$.
3. Montrer que la série $\sum f'(n)$ converge si et seulement si la suite $(f(n))_{n \geq 1}$ est majorée.

Solution.

1. Comme $f'' < 0$ sur $\mathbb{R}_+$, la fonction f' est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc la suite $(f'(n))_n$ est aussi décroissante. De plus, par hypothèse, $f' \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$ donc la suite $(f'(n))$ est minorée. Par **théorème de limite monotone**, elle converge.
2. C'est l'inégalité des accroissements finis qu'on applique deux fois (une fois pour chaque inégalité de l'encadrement) en observant que, comme f' est décroissante, $f'(x)$ est le minimum de f' sur $[x, x+1]$ et aussi le maximum de f' sur $[x, x-1]$.
(Observons que f est elle croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $f(x+1) - f(x) \geq 0$ et $f(x) - f(x-1) \geq 0$.)

3. Le calcul des sommes partielles permet un encadrement qui fait apparaître des télescopes :

$$f(n+1) - f(1) = \sum_{k=1}^n (f(k+1) - f(k)) \leq \sum_{k=1}^n f'(k) \leq \sum_{k=1}^n (f(k) - f(k-1)) = f(n) - f(0).$$

✕ Si la suite $(f(n))$ est majorée, alors la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=1}^n f'(k)\right)_n$ est majorée et étant croissante (c'est une suite de sommes de termes positifs), le **théorème de limite monotone** affirme qu'elle converge ce qui veut dire que la série converge.

✕ Réciproquement, si la série converge, alors pour tout n , $f(n+1) \leq f(1) + \sum_{k=1}^{+\infty} f'(k)$ et la suite $(f(n))$ est bien bornée.

**Exercice 5.20.**

1. À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, donner un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^n \ln^2 k$.
2. En déduire la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{S_n}$.

Solution.

1. Ne pas hésiter à commencer par faire un dessin ici ... $x \mapsto \ln^2 x$ est croissante sur $[1, +\infty[$ et à valeurs positives. Pour tout $k \geq 1$ on donc

$$\int_k^{k+1} \ln^2 k dx \leq \int_k^{k+1} \ln^2 x dx \leq \int_k^{k+1} \ln^2(k+1) dx \iff \ln^2 k \leq \int_k^{k+1} \ln^2 x dx \leq \ln^2(k+1).$$

En sommant ces inégalités pour k allant de 1 à n il vient

$$\sum_{k=1}^n \ln^2 k \leq \int_1^{n+1} \ln^2 x dx \leq \sum_{k=1}^n \ln^2(k+1) \iff \sum_{k=1}^n \ln^2 k \leq \int_1^{n+1} \ln^2 x dx \leq \sum_{k=2}^{n+1} \ln^2(k) = \sum_{k=1}^{n+1} \ln^2(k).$$

On en déduit alors (en changeant n en $n-1$ dans l'inégalité de droite):

$$\int_1^n \ln^2 x dx \leq \sum_{k=1}^n \ln^2 k \leq \int_1^{n+1} \ln^2 x dx.$$

En intégrant par parties (on pose $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln^2 x$ donc u et v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$) on obtient

$$n \ln^2 n - 2n \ln n + 2n - 2 \leq \sum_{k=1}^n \ln^2 k \leq (n+1) \ln^2 (n+1) - 2(n+1) \ln (n+1) + 2n.$$

Les deux membres extrêmes de l'encadrement sont tous deux équivalents à $n \ln^2 n$, ce dont on en tire $S_n \underset{+\infty}{\sim} n \ln^2 n$.

2. On en déduit $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n \ln^2 n}$ (il s'agit d'un exemple d'une série de Bertrand), dont on montre la convergence par le théorème de comparaison avec une intégrale (encore!): $\frac{1}{x \ln^2 x}$ est positive et décroissante vers 0, donc la série est de même nature que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \left[-\frac{1}{\ln x} \right]_2^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2}$ et ainsi la série converge.

□

Exercice 5.21.

On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$.

1. Montrer que (u_n) converge et donner sa limite.
2. Donner la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum \left(u_n - \frac{1}{n}\right)$.

Solution.

1. Par une récurrence immédiate, on obtient, pour $n \geq 1$, $u_n \geq 0$.
Il suit qu'on a, pour $n \geq 2$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$. Par encadrement, (u_n) converge vers 0.
2. (u_n) converge vers 0, donc (e^{-u_n}) converge vers 1, donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} > 0$. Par théorème d'équivalence des séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

On a de plus $u_{n-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, donc $u_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

On en tire, en développant l'exponentielle,

$$e^{-u_{n-1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right);$$

puis

$$u_n = \frac{e^{-u_{n-1}}}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi $u_n - \frac{1}{n} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2} < 0$, donc $\sum \left(u_n - \frac{1}{n}\right)$ converge.

□

Exercice 5.22.

Séries de Bertrand

Soient $\alpha, \beta > 0$. Montrer que

$$\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} \text{ converge } \iff \alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1).$$

Solution.

✕ Observons déjà que, si $\alpha < 1$ alors $\frac{1}{n^\alpha} = o\left(\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}\right)$ et comme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge, il en est de même pour

$$\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}.$$

✕ Si $\alpha > 1$, en prenant $\gamma \in]1, \alpha[$ on a : $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$ et donc $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge par comparaison.

- ✕ Reste à traiter le cas $\alpha = 1$. C'est une comparaison série/intégrale. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t \ln^\beta(t)}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut écrire, pour $N \geq 2$,

$$\int_2^{N+1} \frac{dt}{t \ln^\beta(t)} \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n \ln^\beta(n)} \leq \frac{1}{2 \ln^\beta(2)} + \int_2^N \frac{dt}{t \ln^\beta(t)}.$$

Le cas $\beta = 1$ se calcule séparément.

- Si $\beta = 1$, alors $\int_2^N \frac{dt}{t \ln(t)} = \ln(\ln(N)) - \ln(\ln(2)) \rightarrow +\infty$. Ainsi, la série diverge par comparaison.
- Si $\beta \neq 1$, alors

$$\frac{1}{1-\beta} \left(\frac{1}{\ln^{\beta-1}(N+1)} - \frac{1}{\ln^{\beta-1}(2)} \right) \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n \ln^\beta(n)} \leq \frac{1}{2 \ln^\beta(2)} + \frac{1}{1-\beta} \left(\frac{1}{\ln^{\beta-1}(N)} - \frac{1}{\ln^{\beta-1}(2)} \right).$$

Si $\beta < 1$ le membre de gauche tend vers $+\infty$ donc par comparaison la série diverge.

Si $\beta > 1$ le membre de droite a une limite finie, donc la suite des sommes partielles est bornée et comme il s'agit d'une série à termes positifs, le théorème de convergence monotone permet d'affirmer que la série converge.

□

Exercice 5.23.

Oral Math II 2024

1. Montrer que la série $\sum \frac{1}{k^2-1}$ converge.
2. Décomposer en éléments simple $\frac{1}{k^2-1}$.
3. En déduire la valeur de la somme $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2-1}$.
4. Convergence et somme de la série $\sum \frac{[\sqrt{k+1}] - [\sqrt{k}]}{k}$.

Solution.

1. Sans difficulté : $\frac{1}{k^2-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2} > 0$. Il suit que $\sum \frac{1}{k^2-1}$ converge par critère de comparaison (avec une série de Riemann convergente) pour les séries à termes positifs.
2. On a déjà rencontré ce quotient... on trouve que, pour $k \geq 2$,

$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{(k-1)(k+1)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right].$$

3. La décomposition précédente permet de faire apparaître un télescopage. Soit $N \geq 2$. On a

$$S_N = \sum_{k=2}^N \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^N \left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right] + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^N \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right] = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{N} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} \right] \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{3}{4}.$$

4. On se doute qu'il y a un lien avec la question précédente. Calculons les premiers termes du terme général. On pose, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$a_k = \frac{[\sqrt{k+1}] - [\sqrt{k}]}{k}.$$

Le calcul donne

$$a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = 0, a_5 = 0, a_6 = 0, a_7 = 0, a_8 = \frac{1}{8}, \dots$$

Ainsi, les termes en dehors de ceux qui précèdent un carré ($3 = 2^2 - 1$, $8 = 3^2 - 1$) semblent être nuls. En effet, si $(k-1)^2 \leq j \leq k^2 - 2$, on a $(k-1)^2 + 1 \leq j+1 \leq k^2 - 1$ et donc

$$k-1 < \sqrt{(k-1)^2 + 1} \leq \sqrt{j+1} \leq \sqrt{k^2 - 1} < k, \quad k-1 \leq \sqrt{j} \leq \sqrt{k^2 - 2} < k$$

ainsi $a_j = 0$. Par contre, si $j = k^2 - 1$, alors $\sqrt{j+1} = k$ alors que $k-1 \leq \sqrt{j} < k$ ainsi

$$a_{k^2-1} = \frac{k - (k-1)}{k^2-1} = \frac{1}{k^2-1}.$$

Il suit qu'en sommant par paquets, on a

$$\sum_{j=0}^{+\infty} a_j = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k^2-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2-1} = \frac{3}{4}.$$

□

Exercice 5.24.

Oral Math II 2025

Soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \prod_{k=0}^n u_k$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (u_n - 1)u_n + 1$ et $\frac{u_n - 1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$.
2. Montrer la convergence de la série $\sum \frac{1}{u_n}$ et calculer sa somme.
3. Montrer la convergence de la suite de terme général $v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$ et calculer sa limite.

Solution.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il est clair que $u_{n+1} - 1 = \prod_{k=0}^n u_k = u_n \prod_{k=0}^{n-1} u_k = u_n (u_n - 1)$.

Une récurrence immédiate permet de voir que $u_n \geq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, $u_n - 1 \neq 0$. La relation précédente se réécrit

$$\frac{u_n(u_n - 1)}{u_{n+1} - 1} = 1 \iff \frac{u_n - 1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{u_n}$$

Par ailleurs,

$$\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{(u_n - 1)u_n} = \frac{1}{u_n - 1} \left(1 - \frac{1}{u_n}\right) = \frac{1}{u_n - 1} \times \frac{u_n - 1}{u_n} = \frac{1}{u_n}.$$

2. On a donc un télescope ; pour $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^N \frac{1}{u_n} = \sum_{n=0}^N \left[\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \right] = \frac{1}{u_0 - 1} - \frac{1}{u_{N+1} - 1}.$$

On peut en fait montrer par récurrence que $u_n \geq 2^n + 1$. En effet, $u_0 = 2 \geq 1 + 1$, puis, si on suppose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ arbitraire, que $u_n \geq 2^n + 1$, alors $u_{n+1} = u_n(u_n - 1) + 1 \geq 1 + (2^n + 1)(2^n) \geq 2^{n+1} + 1$ car $2^n + 1 \geq 2$. Alors, par comparaison $u_n \rightarrow +\infty$. Et $1/(u_{N+1} - 1) \rightarrow 0$. Il suit que la série considérée converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{u_n} = 1.$$

3. Par télescope

$$\begin{aligned} \frac{\ln(u_n)}{2^n} &= \ln(u_0) + \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{\ln(u_{k+1})}{2^{k+1}} - \frac{\ln(u_k)}{2^k} \right] \\ &= \ln(2) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} \ln \left(\frac{u_{k+1}}{u_k^2} \right) = \ln(2) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} \ln \left(\frac{1 + u_k(u_k - 1)}{u_k^2} \right) \\ &= \ln(2) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} \ln \left(1 - \frac{1}{u_k} + \frac{1}{u_k^2} \right), \end{aligned}$$

ce qui permet de voir que la suite converge mais pas encore de déterminer la limite... On peut montrer que cette limite est positive est inférieur à $\ln(2)$.

Je concède pour l'instant ne pas trouver comment déterminer explicitement la limite. Soit l'énoncé est mal rapporté ou soit plus probablement, quelque chose m'échappe.

Si quelqu'un trouve, je prends !

□

Exercice 5.25.

Série de fonctions, Oral Math II 2024

1. Étudier la convergence de la série $\sum \frac{1}{1+(nx)^2}$, où $x \in \mathbb{R}^*$.
2. On pose $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+(nx)^2}$, $x \in \mathbb{R}^*$.
 - a. Montrer que h est paire puis étudier ses variations.
 - b. Déterminer la limite de h en $+\infty$.
 - c. Par une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent de $h(x)$ lorsque $x \rightarrow 0^+$.

Solution.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$ fixé. Comme $\frac{1}{1+(nx)^2} \sim \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{n^2}$, une comparaison à une série de Riemann assure la convergence de la série et donc $h(x)$ est bien défini. Il est clair que $h(-x) = h(x)$ donc la fonction est paire. Soient x, y deux réels tels que $0 < x < y$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{1+x^2n^2} \leq \frac{1}{1+y^2n^2}$$

puis, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^N \frac{1}{1+x^2n^2} \geq \sum_{n=0}^N \frac{1}{1+y^2n^2}.$$

Par passage à la limite, on a $h(x) \geq h(y)$. Donc h est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par parité, h est croissante sur $\mathbb{R}_-^*$.

2. La fonction h étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et minorée par 1, on sait que h admet une limite finie lorsque $x \rightarrow +\infty$. Soit $x > 0$ fixé. On a, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$1 \leq \sum_{n=0}^N \frac{1}{1+x^2n^2} \leq 1 + \sum_{n=1}^N \frac{1}{x^2n^2} = 1 + \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$$

Par théorème des gendarmes, $h(x) \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Remarque. On pouvait aussi faire une comparaison série/intégrale dès cette question, par décroissance de la fonction $f_x : t \mapsto \frac{1}{1+x^2t^2}$ sur $\mathbb{R}_+$,

$$1 \leq \sum_{n=0}^N \frac{1}{1+x^2n^2} \leq 1 + \sum_{n=1}^N \int_{n-1}^n \frac{1}{1+x^2t^2} dt = 1 + \int_0^N \frac{dt}{1+(xt)^2} = 1 + \left[\frac{\arctan(xt)}{x} \right]_0^N = 1 + \frac{\arctan(Nx)}{x}.$$

3. On se sert de la remarque précédente de toute façon dans cette question. Pour $x > 0$ fixé et $N \in \mathbb{N}$.

$$\int_0^{N+1} \frac{dt}{1+x^2t^2} \leq \sum_{n=0}^N \frac{1}{1+x^2n^2} \leq 1 + \frac{\arctan(Nx)}{x}$$

ou encore

$$\frac{\arctan((N+1)x)}{x} \leq \sum_{n=0}^N \frac{1}{1+x^2n^2} \leq 1 + \frac{\arctan(Nx)}{x}.$$

On passe à la limite en $N \rightarrow \pm\infty$

$$\frac{\pi}{2x} \leq h(x) \leq 1 + \frac{\pi}{2x}.$$

On a donc

$$h(x) \sim \frac{\pi}{2x}, \quad x \rightarrow 0^+.$$

□

Exercice 5.26.

Règle de Raabe-Duhamel

Soit (u_n) une suite à termes positifs telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. On suppose $a > 1$. Soit $b \in]1, a[$ et posons $v_n = \frac{1}{n^b}$.

Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

En déduire que $\sum u_n$ converge si $a > 1$.

2. Démontrer que $\sum u_n$ diverge si $a < 1$.

3. En utilisant les *séries de Bertrand*, montrer que le cas $a = 1$ est douteux.

Solution.

1. Soit $b \in]1, a[$. On a $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-b} = 1 - \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, lorsque $n \rightarrow +\infty$. Il suit que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = -\frac{(a-b)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

ce qui est négatif pour n grand, car $a - b > 0$. D'où le résultat.

Il découle de cette inégalité que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir d'un certain rang. Celle-ci étant minorée par 0 (l'hypothèse que (u_n) permet de voir que les termes sont positifs à partir d'un certain rang au moins), elle est convergente, donc bornée. On peut donc écrire $u_n = O(v_n) = O\left(\frac{1}{n^b}\right)$ et effectuer une comparaison à une série de Riemann convergente. On a le résultat voulu.

2. On s'inspire de l'idée précédente. On montre que cette fois, à partir d'un certain rang $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ avec $v_n = \frac{1}{n^b}$ mais cette fois $a < b < 1$. Il suit, qu'à partir d'un certain rang n_1 ,

$$u_n \geq \left(\frac{u_{n_1}}{v_{n_1}}\right) v_n$$

or $\sum v_n$ diverge (Riemann). Donc $\sum u_n$ diverge.

3. Prenons $u_n = \frac{1}{n \ln(n)}$. On peut écrire

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(1 - \frac{1}{n \ln(n)} + o\left(\frac{1}{n \ln(n)}\right)\right) = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

on est donc dans le cas où $a = 1$ et on sait que la série diverge (c'est une comparaison série/intégrale). En prenant en revanche $u_n = \frac{1}{n \ln^2(n)}$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(1 - \frac{1}{n \ln(n)} + o\left(\frac{1}{n \ln(n)}\right)\right)^2 = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

et une fois de plus $a = 1$ mais cette fois la série converge. On ne peut donc rien conclure lorsque $a = 1$.

□

Exercice 5.27.

Un cas limite

1. Soit f la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par $f(t) = \ln(1+t) - t$. Expliciter le développement limité à l'ordre 2 en 0 de f . En déduire la nature de la série $\sum f(1/n)$.

On considère un nombre réel $a > 0$ et une suite à termes strictement positifs $(u_n)_{n \geq 1}$. On introduit alors les suites (w_n) et (ℓ_n) définies, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$w_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \frac{a}{n}, \quad \ell_n = \ln(n^a u_n).$$

On **suppose** que la série de terme général w_n est absolument convergente.

2. Montrer la convergence des séries $\sum_{n \geq 1} w_n^2$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{w_n}{n}$.

3. Vérifier que

$$\ell_{n+1} - \ell_n = f\left(w_n - \frac{a}{n}\right) + w_n + af\left(\frac{1}{n}\right).$$

4. Préciser

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n - \frac{a}{n}.$$

puis la nature de la série $\sum_{n \geq 1} f\left(w_n - \frac{a}{n}\right)$.

5. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} (\ell_{n+1} - \ell_n)$.

6. Que peut-on en déduire à propos de la suite (ℓ_n) ?

7. Conclure qu'il existe une constante $A > 0$ telle que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A}{n^a}.$$

8. **Application.** On considère la suite (u_n) définie, pour $n \geq 1$ par

$$u_n = \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}.$$

a. Expliciter u_1, u_2, u_3 .

b. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Solution.

1. Soit $f : t \mapsto \ln(1+t) - t$. La fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $] -1; +\infty[$. Utilisant un DL en 0 de $t \mapsto \ln(1+t)$, on obtient

$$f(t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) - t = -\frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

Il suit que

$$f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{t^2}{2}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \rightarrow +\infty$. Comme $1/n \rightarrow 0$, on a

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{2n^2}.$$

Donc

$$-f\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n^2}.$$

Or, la série de terme général $1/(2n^2)$ est le multiple du terme général d'une série de Riemann convergente donc, par critère d'équivalence la série $\sum -f(1/n)$ converge, puis on en déduit que $\sum f(1/n)$ converge.

2. Si la série de terme général $|w_n|$ converge, alors son terme général tend vers 0 et en particulier, est plus petit que 1 à partir d'un certain rang. Il suit que, toujours à partir de ce rang,

$$0 \leq w_n^2 \leq |w_n|$$

et par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum w_n^2$ converge. De plus, pour $n \geq 1$,

$$0 \leq \left| \frac{w_n}{n} \right| \leq |w_n|$$

et, encore par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum w_n/n$ converge absolument donc converge (simplement).

3. C'est un (simple) calcul à vérifier, en remarquant que $\ln(t+1) = f(t) + t$.

$$\begin{aligned}
 \ell_{n+1} - \ell_n &= \ln((n+1)^a u_{n+1}) - \ln(n^a u_n) \\
 &= a \ln(n+1) + \ln(u_{n+1}) - a \ln(n) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) + a \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\
 &= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + 1\right) + a \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
 &= f\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1\right) + \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + af\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{a}{n} \\
 &= f\left(w_n - \frac{a}{n}\right) + w_n + af\left(\frac{1}{n}\right),
 \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

4. Comme la série $\sum w_n$ est absolument convergente, alors $|w_n|$ tend vers 0 et il en est de même (par application immédiate du théorème des gendarmes) de w_n . Comme a/n tend aussi vers 0, il suit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n - \frac{a}{n} = 0.$$

On peut donc utiliser l'équivalent de f en 0.

$$f\left(w_n - \frac{a}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \left(w_n - \frac{a}{n}\right)^2 = -\frac{w_n^2}{2} + a \frac{w_n}{n} - \frac{a^2}{2n^2}.$$

On reconnaît la combinaison de termes généraux trois séries convergentes. Par critère d'équivalence (adapté pour les séries à termes négatifs comme ci-dessus), on peut conclure que la série $\sum f(w_n - a/n)$ converge.

5. Comme vu précédemment, $(\ell_{n+1} - \ell_n)$ est combinaison de trois termes généraux de séries convergentes donc la série $\sum (\ell_{n+1} - \ell_n)$ converge.

6. C'est le fameux lien entre suite et série "télescopique". On constate que

$$\sum_{k=1}^{n-1} (\ell_{k+1} - \ell_k) = \ell_n - \ell_1 \iff \ell_n = \ell_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (\ell_{k+1} - \ell_k).$$

Ainsi, la suite (ℓ_n) converge. On peut même dire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n = \ell_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (\ell_{n+1} - \ell_n) = C.$$

7. On rappelle que $\ell_n = \ln(n^a u_n) \iff u_n = e^{\ell_n} / n^a$. Ainsi, la dernière question donne, en posant $A = \exp(C)$,

$$n^a u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A \iff \frac{n^a}{A} \cdot u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1,$$

ou encore

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A}{n^a}.$$

8. **Application.** On considère la suite (u_n) définie, pour $n \geq 1$ par

$$u_n = \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}.$$

a. Par définition

$$u_1 = \frac{2}{3}$$

$$u_2 = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

$$u_3 = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} = \frac{48}{105}.$$

- b. Comme le suggère le mot *Application*, on va essayer d'appliquer le critère de convergence démontré précédemment. Commençons par calculer

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k}{2k+1} \times \prod_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k} \\ &= \frac{2n+2}{2n+3} \\ &= 1 - \frac{1}{2n+3}\end{aligned}$$

En particulier, on voit qu'en posant

$$w_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+3} = \frac{3}{2n(2n+3)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{4n^2}$$

on a défini une série $\sum w_n$ (absolument) convergente. En appliquant la conclusion de la Question 7. - avec $a = 1/2$ donc - il suit qu'il existe une constante $A > 0$ telle que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A}{\sqrt{n}}.$$

Il suit, par critère d'équivalence, que la série $\sum u_n$ diverge.

□

Exercice 5.28.

Constante d'Euler

Soient $m \in \mathbb{N}$ un entier et $f : [m, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue et décroissante.

1. a. Montrer que la série $\sum_{n>m} \left(\int_{n-1}^n f(t) dt - f(n) \right)$ converge.

- b. En déduire l'existence d'une constante κ telle que $\sum_{j=m}^n f(j) = \int_m^n f(t) dt + \kappa + o(1)$.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad J_n = \sum_{k=2}^n \frac{\ln(k)}{k} \quad \text{et} \quad K_n = \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k \ln(k)}{k}$$

2. Montrer qu'il existe une constante γ appelée *constante d'Euler* telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (H_n - \ln(n)) = \gamma$.

3. Déterminer la nature de $(J_n)_{n \geq 2}$ et $(K_n)_{n \geq 2}$.

4. a. Montrer que, pour tout $n \geq 2$,

$$K_{2n} = \ln(2)H_n + J_n - J_{2n}.$$

- b. Exprimer la valeur de $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k}$ en fonction de γ .

5. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Solution.

1. a. On fait apparaître une somme télescopique comme majorant ; comme f est décroissante, on a $\left(\int_{n-1}^n f(t) dt - f(n) \right) \leq f(n-1) - f(n)$ donc

$$\sum_{k=m+1}^n \left(\int_{k-1}^k f(t) dt - f(k) \right) \leq \sum_{k=m+1}^n (f(k-1) - f(k)) = f(m) - f(n) \leq f(m).$$

La suite des sommes partielles est croissante (car à termes positifs) et majorée : elle converge.

- b. Notons ℓ la somme de la série précédente. On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^n f(k) &= f(m) + \sum_{k=m+1}^n \left(f(k) - \int_{k-1}^k f(t) dt \right) + \int_m^n f(t) dt \\ &= \int_m^n f(t) dt + f(m) - \ell + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(f(k) - \int_{k-1}^k f(t) dt \right) = \int_m^n f(t) dt + f(m) - \ell + o(1)\end{aligned}$$

Il suffit de poser $\kappa = f(m) - \ell$.

2. On utilise la question précédente avec $f : t \mapsto 1/t$ et $m = 1$. On a immédiatement $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

3. Le critère spécial des séries alternées affirme que (K_n) est convergente. Par ailleurs, (J_n) est divergente car la Question 1. avec $f : t \mapsto \ln(t)/t$ et $m = 3$ donne

$$J_n = \frac{\ln(2)}{2} + \int_3^n \frac{\ln(t)}{t} dt + \kappa + o(1) = \frac{\ln^2(n)}{2} + \lambda + o(1) \rightarrow +\infty$$

donc (J_n) diverge (vers $+\infty$).

4. a. On calcule en séparant termes pairs et impairs

$$\begin{aligned} K_{2n} &= \sum_{k=2}^{2n} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k-1)}{2k-1} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k-1)}{2k-1} \\ &= \ln(2)H_n + J_n - J_{2n} \end{aligned}$$

b. En combinant les développements asymptotiques précédents

$$\begin{aligned} K_{2n} &= \ln(2) \ln(n) + \ln(2)\gamma + \frac{\ln^2(n)}{2} + \lambda - \frac{\ln^2(2n)}{2} - \lambda + o(1) \\ &= \ln(2) \ln(n) + \ln(2)\gamma + \frac{\ln^2(n)}{2} - \frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(2) \ln(n) - \frac{\ln^2(n)}{2} + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(2)\gamma - \frac{\ln^2(2)}{2}, \end{aligned}$$

qui est la valeur cherchée (car (K_n) étant convergente, (K_{2n}) converge vers la même limite).

5. Notons $A_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$. Le CSSA affirme que (A_n) converge. On cherche sa limite qu'on obtient par la même méthode de découpage des termes

$$A_{2n} = H_n - H_{2n} = \ln(n) + \gamma + o(1) - \ln(2n) - \gamma = -\ln(2) + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln(2).$$

□

Exercice 5.29.

Critère d'Abel

Soient (a_n) et (b_n) deux suites. On note $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$ et $S_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k$.

1. Montrer, en remarquant que, pour $k \geq 2$, on a $B_k - B_{k-1} = b_k$, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$S_n = a_{n+1}B_n - \sum_{k=1}^n B_k(a_{k+1} - a_k).$$

2. Démontrer alors le résultat suivant :

Théorème.

Critère d'Abel (1802-1829)

Si la suite (a_n) tend vers 0, si la suite (B_n) est bornée et si la série $\sum (a_k - a_{k+1})$ converge absolument, alors la série $\sum a_k b_k$ converge.

On considère la série $\sum (-1)^n \sqrt{n} \ln\left(\frac{n+2}{n}\right)$.

3. Montrer que

$$a_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \sqrt{n} \ln\left(\frac{n+2}{n}\right) \sim \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad n \rightarrow +\infty$$

4. En déduire que la série n'est pas absolument convergente.

5. En écrivant $\sqrt{n+1} = \sqrt{n} \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$, montrer que

$$a_n - a_{n+1} \sim \frac{1}{n\sqrt{n}}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

6. Conclure que le critère d'Abel s'applique et que la série est bien convergente.

Solution.

1. L'idée principale de cette question est d'observer que

$$b_k = B_k - B_{k-1}, \quad k \geq 2.$$

et que $b_1 = B_1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k &= a_1 b_1 + \sum_{k=2}^n a_k (B_k - B_{k-1}) \\ &= a_1 B_1 + \sum_{k=2}^n a_k B_k - \sum_{k=2}^n a_k B_{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^n a_k B_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} B_k \quad (\text{changement d'indice}) \\ &= a_{n+1} B_n - \sum_{k=1}^n B_k (a_{k+1} - a_k), \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue.

2. Supposons donc que

- ✗ La suite (a_n) tend vers 0;
- ✗ la suite (B_n) est bornée;
- ✗ la série $\sum (a_{k+1} - a_k)$ converge absolument.

On peut alors déduire que :

- ✗ la suite $(a_n B_n)$ converge vers 0. En effet, comme (B_n) est bornée, il existe $M \geq 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|B_n| \leq M$. Il suit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$-M a_n \leq a_n B_n \leq M a_n$$

et par le théorème des gendarmes, $a_n B_n$ tend bien vers 0;

- ✗ La série $\sum B_k (a_k - a_{k+1})$ converge (absolument). En effet,

$$|B_k (a_k - a_{k+1})| \leq M |a_{k+1} - a_k|$$

et comme par hypothèse la série $\sum (a_k - a_{k+1})$ converge absolument, le critère de comparaison pour les séries à termes positifs permet d'affirmer que la série $\sum B_k (a_k - a_{k+1})$ converge absolument et donc converge.

Ainsi, la somme partielle S_n admet une limite finie, ce qui est la définition d'une série convergente.

On considère la série $\sum (-1)^n \sqrt{n} \ln \left(\frac{n+2}{n} \right)$.

3. On commence par réécrire la quantité dans le log.

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n} \ln \left(\frac{n+2}{n} \right) \\ &= \sqrt{n} \ln \left(1 + \frac{2}{n} \right) \\ &= \sqrt{n} \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \\ &= \frac{2\sqrt{n}}{n} + o \left(\frac{\sqrt{n}}{n} \right) \\ &\sim \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

4. Comme

$$\left| (-1)^n \sqrt{n} \ln \left(\frac{n+2}{n} \right) \right| = a_n \sim \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad n \rightarrow +\infty,$$

le critère d'équivalence (en comparaison à une série de Riemann divergente) permet d'affirmer que la série ne converge pas absolument.

5. On utilise les DL rappelés ci-dessus.

$$\begin{aligned}
 a_n - a_{n+1} &= \sqrt{n} \ln \left(1 + \frac{2}{n} \right) - \sqrt{n} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \ln \left(1 + \frac{2}{n+1} \right) \\
 &= \sqrt{n} \left(\ln \left(1 + \frac{2}{n} \right) - \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \ln \left(1 + \frac{2}{n+1} \right) \right) \\
 &= \sqrt{n} \left(\frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) - \left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \left(\frac{2}{(n+1)} - \frac{2}{(n+1)^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \right) \\
 a_n - a_{n+1} &= \sqrt{n} \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n(n+1)} - \frac{2}{n+1} + \frac{2}{(n+1)^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \\
 &= \sqrt{n} \left(\frac{2}{n(n+1)} - \frac{1}{n(n+1)} + \frac{2n^2 - 2(n+1)^2}{n^2(n+1)^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \\
 &= \sqrt{n} \left(\frac{1}{n(n+1)} + \frac{2-4n}{n^2(n+1)^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \\
 &= \sqrt{n} \left(\frac{1}{n(n+1)} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n\sqrt{n}}
 \end{aligned}$$

6. On vérifie que les hypothèses du critères sont bien satisfaites:

- ✗ Comme $a_n \sim 2/\sqrt{n}$, on a bien que $a_n \rightarrow 0$;
- ✗ La suite (B_n) est bornée. En effet

$$B_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc $|B_n| \leq 1$;

- ✗ La série $\sum (a_k - a_{k+1})$ converge absolument. En effet,

$$|a_k - a_{k+1}| = a_k - a_{k+1} \sim \frac{1}{k\sqrt{k}}$$

et par équivalence avec une série de Riemann convergente, on a bien la convergence.

Tous les critères sont satisfaits, la série considérée converge.

□

Exercice 5.30.

Un calcul de $\zeta(2)$ - Extrait Devoir Surveillé N°4, Automne 2024

On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t \, dt, \quad J_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n} t \, dt \quad \text{et} \quad Q_n = \frac{J_n}{I_n}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(2n+2)I_{n+1} = (2n+1)I_n \quad \text{puis} \quad I_n = n((2n-1)J_{n-1} - 2nJ_n).$$

2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Q_{n-1} - Q_n = \frac{1}{2n^2}$.

3. Obtenir que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad x \leq \frac{\pi}{2} \sin x.$$

4. Montrer alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad J_n \leq \frac{\pi^2}{4} (I_n - I_{n+1}) = \frac{\pi^2}{4} \frac{I_n}{2n+2}$$

5. Déterminer la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

Solution.

1. C'est une intégration par parties classique :

$$I_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t) \cos^2(t) dt = I_n - \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t) \sin^2(t) dt = I_n - \left[\frac{-\cos^{2n+1}(t) \sin(t)}{2n+1} \right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2n+1} I_{n+1}$$

ce qui donne bien $(2n+2)I_{n+1} = (2n+1)I_n$.

Pour l'autre égalité, il s'agit de deux IPP successives :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t) \cos^2(t) dt = [t \cos^{2n}(t)]_0^{\pi/2} + n \int_0^{\pi/2} 2t \sin(t) \cos^{2n-1}(t) dt \\ &= n \int_0^{\pi/2} 2t \sin(t) \cos^{2n-1}(t) dt \\ &= n \left([t^2 \sin(t) \cos^{2n-1}(t)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} t^2 (\cos^{2n}(t) - (2n-1) \sin^2(t) \cos^{2n-2}(t)) dt \right) \\ &= n \int_0^{\pi/2} t^2 (\cos^{2n}(t) - (2n-1) \sin^2(t) \cos^{2n-2}(t)) dt \\ &= n(-J_n + (2n-1)J_{n-1} - (2n-1)J_n) = n((2n-1)J_{n-1} - 2nJ_n). \end{aligned}$$

2. On pense à justifier que Q_n est bien défini ! D'après ce qui précède

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}, \quad 1 = \frac{I_n}{I_n} = n \left((2n-1) \frac{J_{n-1}}{I_n} - 2nQ_n \right)$$

on remplace I_n pour faire apparaître Q_{n-1} . On a $1 = n(2nQ_{n-1} - 2nQ_n)$ ou encore $1 = 2n^2(Q_{n-1} - Q_n)$ ce qui donne ce qu'on demande.

3. La fonction $\sin$ est concave sur $[0, \pi/2]$, sa courbe est au-dessus de la corde entre 0 et $\pi/2$ ce qui donne immédiatement l'inégalité demandée.

4. Par croissance de l'intégrale, $0 \leq J_n \leq \int_0^{\pi/2} \frac{\pi^2}{4} \underbrace{\sin^2 t}_{1-\cos^2 t} \cos^{2n} t dt = \frac{\pi^2}{4} (I_n - I_{n+1})$ où on a utilisé l'inégalité de convexité précédente.

Or $I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$, donc

$$I_n - I_{n+1} = I_n \left(1 - \frac{2n+1}{2n+2} \right) = \frac{I_n}{2n+2} \quad \text{puis} \quad J_n \leq \frac{\pi^2}{4} (I_n - I_{n+1}) = \frac{\pi^2}{4} \frac{I_n}{2n+2}.$$

5. L'inégalité précédente (en divisant par I_n) donne $Q_n \rightarrow 0$ par les gendarmes de Saint-Tropez. De plus, comme $I_0 = \pi/2$ et $J_0 = \int_0^{\pi/2} t^2 dt = \frac{\pi^3}{24}$, on obtient : $Q_0 = \frac{\pi^2}{12}$. Par télescopage, on obtient

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^N 2(Q_{n-1} - Q_n) = 2(Q_0 - Q_N) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 2Q_0 = \frac{\pi^2}{6}.$$

□