



6

Déterminant - Éléments de solution

6 Sélection d'exercices

Exercice 6.6.

Parmi les familles de $\mathbb{R}^3$ suivantes, indiquez lesquelles sont des bases.

- i. $B_1 = ((1, 1, 1), (-1, 2, 0), (2, -7, -1))$;
- ii. $B_2 = ((1, 2, -1), (1, -1, 2), (2, 1, -1))$;
- iii. $B_3 = ((-x, 1, 1), (1, -x, 1), (1, 1, -x))$.

Solution.

- i. Après calculs on trouve $\det(B_1) = 0$ donc B_1 n'est pas une base.
- ii. Après calculs on trouve $\det(B_2) = 6 \neq 0$ donc B_2 est une base.
- iii. On a

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1+x & 1-x^2 \\ 0 & -1-x & 1+x \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + xL_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+x & 1-x^2 \\ -(1+x) & 1+x \end{vmatrix} = (1+x)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1-x \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (1+x)^2(2-x)$$

Donc B_3 est une base si et seulement si $x \notin \{-1, 2\}$.

□

Exercice 6.7.

Donner une équation du plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $v = (1, 1, 1)$ et $w = (-1, 0, 1)$.

Solution. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Une équation de ce plan F s'obtient en écrivant:

$$u \in F \iff u, v, w \text{ colinéaires} \iff \det(u, v, w) = 0 \iff \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 1 & 0 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff x - 2y + z = 0.$$

□

Exercice 6.8.

Calculer les déterminants suivants (on en donnera une forme factorisée).

$$\begin{array}{llll} \text{i. } \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & b & c \\ c & c & c \end{vmatrix} & \text{ii. } \begin{vmatrix} x & a & b \\ a & x & b \\ a & b & x \end{vmatrix} & \text{iii. } \begin{vmatrix} n! & (n-1)! & (n-2)! \\ (n-1)! & (n-2)! & (n-3)! \\ (n-2)! & (n-3)! & (n-4)! \end{vmatrix} & \text{iv. } \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix} \end{array}$$

Solution.

i. On a

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & b & c \\ c & c & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 \\ b-c & b-c & 0 \\ c & c & c \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array} \\
 = c(a-b)(b-c).$$

ii. On a

$$\begin{vmatrix} x & a & b \\ a & x & b \\ a & b & x \end{vmatrix} \stackrel{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2}}{=} \begin{vmatrix} x-a & a-x & 0 \\ a & x & b \\ 0 & b-x & x-b \end{vmatrix} = (b-x)(a-x) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ a & x & b \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
 \stackrel{C_2 \leftarrow C_2 - C_1}{=} (b-x)(a-x) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ a & x+a & b \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
 = -(b-x)(a-x) \begin{vmatrix} x+a & b \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \text{ on développe par rapport à } L_1 \\
 = (b-x)(a-x)(x+a+b).$$

iii. On a

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} n! & (n-1)! & (n-2)! \\ (n-1)! & (n-2)! & (n-3)! \\ (n-2)! & (n-3)! & (n-4)! \end{vmatrix} \\
 &= (n-2)!(n-3)!(n-4)! \begin{vmatrix} n(n-1) & (n-1)(n-2) & (n-2)(n-3) \\ (n-1) & (n-2) & (n-3) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{\substack{C_1 \leftarrow C_1 - C_2 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_2}}{=} (n-2)!(n-3)!(n-4)! \begin{vmatrix} 2(n-1) & (n-1)(n-2) & -2(n-2) \\ 1 & (n-2) & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= (n-2)!(n-3)!(n-4)! \begin{vmatrix} 2(n-1) & -2(n-2) \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \text{ en développant par rapport à } L_3 \\
 &= -2(n-2)!(n-3)!(n-4)!
 \end{aligned}$$

iv. On a

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ c-a & b(c-a) & (c-a)(c+a) \\ c-b & a(c-b) & (c-b)(c+b) \end{vmatrix} \\
 = (c-a)(c-b) \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ 1 & b & c+a \\ 1 & a & c+b \end{vmatrix} \\
 \stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{=} (c-a)(c-b)(a-b) \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ 1 & b & c+a \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
 \stackrel{C_3 \leftarrow C_3 + C_2}{=} (c-a)(c-b)(a-b) \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2+ab \\ 1 & b & c+a+b \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
 = -(c-a)(c-b)(a-b) \begin{vmatrix} a+b & a^2+b^2+ab \\ 1 & c+a+b \end{vmatrix} \text{ en développant par rapport à } L_3 \\
 \stackrel{L_1 \leftarrow L_1 - (a+b)L_2}{=} -(c-a)(c-b)(a-b) \begin{vmatrix} 0 & -(ab+bc+ac) \\ 1 & c+a+b \end{vmatrix} \\
 = -(c-a)(c-b)(a-b)(ab+bc+ac).$$

□

Exercice 6.9.

Calculer les déterminants d'ordre n (sauf *iii.* qui est d'ordre $2n$) suivants.

$$\begin{aligned}
 i. A_n &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \dots & a_1 & a_1 \end{vmatrix} & ii. B_n &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} & iii. C_{2n} &= \begin{vmatrix} a & & & b \\ & a & 0 & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ b & & 0 & & a \\ & b & & & a \end{vmatrix}_{[2n]} \\
 iv. D_n &= \begin{vmatrix} a+b & b & 0 & \dots & 0 \\ a & a+b & b & \ddots & \vdots \\ 0 & a & a+b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & 0 & a & a+b \end{vmatrix} & v. E_n &= \begin{vmatrix} a & x & \dots & \dots & x \\ y & z & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & z & 0 \\ y & 0 & \dots & 0 & z \end{vmatrix} & vi. F_n &= \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & a & \ddots & \vdots \\ a & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Pour *v.* on pourra calculer E_n pour $n = 2, 3, 4$ puis conjecturer une formule.

Solution.

i. On a

$$\begin{aligned}
 A_n &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \dots & a_1 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & a_2 - a_3 & \dots & a_n \\ 0 & a_1 - a_2 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & a_1 \end{vmatrix} & \forall j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, C_j \leftarrow C_j - C_{j+1} \\
 &= a_1(a_1 - a_2)^{n-1}
 \end{aligned}$$

ii. On a

$$\begin{aligned}
 B_n &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} n-1 & 1 & \dots & 1 \\ n-1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} & C_1 \leftarrow C_1 + \sum_{k=2}^n C_k \\
 &= (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & -1 \end{vmatrix} & \forall k > 1, L_k \leftarrow L_k - L_1 \\
 &= (n-1)(-1)^{n-1} & \text{car la matrice est triangulaire supérieure}
 \end{aligned}$$

iii. En développant d'abord selon la première colonne on obtient:

$$C_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & b \\ & a & & 0 & b \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & 0 \\ & & b & & 0 \\ b & & & & a \\ & & & & & a \end{vmatrix}_{[2n]} = a \begin{vmatrix} a & & 0 & & b & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ b & & 0 & & a & 0 \\ & & & & & a \end{vmatrix}_{[2n-1]} + (-1)^{2n+1} b \begin{vmatrix} a & & & & b \\ & a & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & \ddots & 0 \\ b & & 0 & & a & 0 \end{vmatrix}_{[2n-1]}$$

Puis en développant ces deux déterminants selon la dernière colonne il vient

$$C_{2n} = (-1)^{2n} a^2 \begin{vmatrix} a & & 0 & & b \\ & \ddots & & & \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ b & & 0 & & a \end{vmatrix}_{[2n-2]} + (-1)^{2n+1} b^2 \begin{vmatrix} a & & 0 & & b \\ & \ddots & & & \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ b & & 0 & & a \end{vmatrix}_{[2n-2]} = (a^2 - b^2) C_{2n-2}.$$

Cela prouve $C_{2n} = (a^2 - b^2) C_{2n-2}$. On en déduit par récurrence $C_{2n} = (a^2 - b^2)^{n-1} C_2 = (a^2 - b^2)^n$.

iv. En développant par rapport à la première colonne il vient:

$$\begin{vmatrix} a+b & b & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+b & b & \ddots & \vdots \\ 0 & a & a+b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & a & a+b \end{vmatrix}_{[n]} = (a+b) \underbrace{\begin{vmatrix} a+b & b & & 0 \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}_{[n-1]}}_{D_{n-1}} - a \begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+b & & 0 \\ & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}_{[n-1]}.$$

Puis en développant selon la première ligne le deuxième déterminant:

$$D_n = (a+b) D_{n-1} - ab \underbrace{\begin{vmatrix} a+b & b & & 0 \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}_{[n-2]}}_{D_{n-2}} = (a+b) D_{n-1} - ab D_{n-2}.$$

La suite (D_n) satisfait donc la relation de récurrence linéaire d'ordre deux $D_n = (a+b) D_{n-1} - ab D_{n-2}$, et les premiers termes sont $D_1 = a+b$ et $D_2 = a^2 + ab + b^2$.

L'équation caractéristique est $X^2 - (a+b)X + ab$, dont les racines sont a et b .

✗ Si $a \neq b$ la solution s'écrit $D_n = \lambda a^n + \mu b^n$, et les valeurs initiales permettent de trouver $\lambda = \frac{-a}{b-a}$ et $\mu = \frac{b}{b-a}$, d'où

$$D_n = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} = \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}.$$

✗ Si $a = b$ la solution s'écrit $D_n = (\lambda n + \mu) a^n$, et les conditions initiales donnent $\lambda = \mu = 1$, puis $D_n = (n+1) a^n$, qui est ce que l'on obtient si on prend $a = b$ dans la formule

$$D_n = \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}.$$

On en déduit que cette formule est donc valable dans tous les cas.

v. On conjecture $\forall n \geq 2, E_n = z^{n-2}(az - (n-1)xy)$ après avoir calculé les premiers termes. On le prouve par récurrence sur n , l'initialisation était faite avant la conjecture.

Pour passer du rang n au rang $n + 1$, on développe E_{n+1} par rapport à la dernière colonne, ce qui donne

$$\begin{vmatrix} a & x & \cdots & \cdots & x \\ y & z & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & z & 0 \\ y & 0 & \cdots & 0 & z \end{vmatrix}_{[n+1]} = (-1)^{n+1} x \begin{vmatrix} y & z & 0 & \cdots & 0 \\ y & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & z \\ y & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{[n]} + z \underbrace{\begin{vmatrix} a & x & \cdots & \cdots & x \\ y & z & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & z & 0 \\ y & 0 & \cdots & 0 & z \end{vmatrix}_{[n]}}_{E_n}$$

D'où en développant le premier par rapport à la dernière ligne:

$$E_{n+1} = (-1)^{n+1} xy \begin{vmatrix} z & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & z \end{vmatrix}_{[n-1]} + z E_n$$

Cela prouve $E_{n+1} = (-1)^{n+1} (-1)^n xy z^{n-1} + z E_n$, ce qui, en appliquant l'hypothèse de récurrence donne

$$E_{n+1} = -xyz^{n-1} + z^{n-1}(az - (n-1)xy) = z^{n-1}(az - nxy)$$

d'où le résultat.

vi. On a

$$\begin{aligned} F_n &= \begin{vmatrix} 1 & . & . & . & 1 & a \\ . & & & 1 & a & 1 \\ . & . & . & . & 1 & . \\ . & 1 & . & . & . & . \\ 1 & a & 1 & . & . & . \\ a & 1 & . & . & . & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} \begin{vmatrix} a & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & a & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & a & 1 \\ 1 & . & . & . & 1 & a \end{vmatrix} \quad \forall k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, C_k \longleftrightarrow C_{n+1-k} \\ &= (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} (a+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & a & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & a & 1 & . \\ 1 & . & . & . & 1 & a \end{vmatrix} \quad L_1 \longleftarrow \sum_{k=1}^n L_k \\ &= (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} (n-1+a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & a-1 & . & . & . & . \\ . & 0 & a-1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 & . \\ 1 & 0 & . & . & 0 & a-1 \end{vmatrix} \quad \forall k > 1, C_k \longleftarrow C_k - C_1 \\ &= (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} (n-1+a) (a-1)^{n-1} \end{aligned}$$

□

Exercice 6.10.

Soit A une matrice carrée d'ordre n , et B la matrice telle que: pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la j -ème colonne de B est la somme des colonnes de A d'indices différents de j . Exprimer $\det(B)$ en fonction de $\det(A)$.

Solution. Soient $A_1, \dots, A_n$ les colonnes de A . Les colonnes de B sont alors données par $B_j = \sum_{k \neq j} A_k$. L'opération

$C_1 \leftarrow \sum_{k=1}^n C_k$ donne alors:

$$\det(B) = \det(B_1, \dots, B_n) = \det\left(\sum_{i=1}^n B_i, B_2, \dots, B_n\right)$$

Or $\sum_{i=1}^n B_i = (n-1) \sum_{i=1}^n A_i$. D'où, en effectuant les opérations $\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, C_i \leftarrow C_i - C_1$:

$$\begin{aligned} \det(B) &= (n-1) \det\left(\sum_{i=1}^n A_i, B_2, \dots, B_n\right) \\ &= (n-1) \det\left(\sum_{i=1}^n A_i, B_2 - \sum_{i=1}^n A_i, \dots, B_n - \sum_{i=1}^n A_i\right) \\ &= (n-1) \det\left(\sum_{i=1}^n A_i, -A_2, \dots, -A_n\right) \\ &= (n-1) \det(A_1, -A_2, \dots, -A_n) \\ &= (-1)^{n-1} (n-1) \det(A) \end{aligned}$$

□

Exercice 6.11.

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{ij} \in [0, 1[$ et $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{ij} \leq 1$.

Montrer que $|\det A| < 1$.

Solution. La démonstration se fait par récurrence sur la taille n de la matrice.

✕ Pour $n = 1$ on a $A = (a_{11})$ et $|\det(A)| = a_{11} \in [0, 1[$.

✕ Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 2$. Supposons le résultat vrai pour toute matrice convenable d'ordre $n-1$, et considérons une matrice A d'ordre n vérifiant les hypothèses indiquées. En notant M_{ij} le mineur de a_{ij} et en développant selon la première ligne, on obtient

$$|\det A| = \left| \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{1j} M_{1j} \right| \leq \sum_{j=1}^n a_{1j} |M_{1j}|.$$

Or M_{1j} est le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la 1^{ère} ligne et la j ^{ème} colonne de A , cette matrice est d'ordre $n-1$ et vérifie encore les conditions voulues. On peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, |M_{1j}| < 1,$$

d'où on tire $|\det A| < \sum_{j=1}^n a_{1j}$, puis $|\det A| < 1$, ce qui établit l'hérédité. D'où le résultat.

□

Exercice 6.12.

Dans un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3, on considère les trois plans d'équations respectives $(1-m)x - 2y + z = 0$, $3x - (1+m)y - 2z = 0$ et $3x - 2y - (1+m)z = 0$.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur m pour que ces trois plans aient au moins une droite en commun, et préciser alors leur intersection.

Solution. Dire que ces trois plans ont au moins une droite en commun, c'est dire que leur intersection n'est pas réduite à $\{0\}$, c'est-à-dire que le système

$$\begin{cases} (1-m)x - 2y + z = 0 \\ 3x - (1+m)y - 2z = 0 \\ 3x - 2y - (1+m)z = 0 \end{cases}$$

n'est pas de Cramer.

Le déterminant de ce système est

$$\begin{vmatrix} 1-m & -2 & 1 \\ 3 & -1-m & -2 \\ 3 & -2 & -1-m \end{vmatrix} = m(1-m)(m+2)$$

après calculs. Donc les plans ont au moins une droite en commun si et seulement si $m = 0$ ou $m = 1$ ou $m = -2$.

- ✕ Dans le cas $m = 0$, le système se ramène alors à $\begin{cases} x = y \\ x = z \end{cases}$: l'intersection est alors la droite dirigée par $\vec{u}(1, 1, 1)$.
- ✕ Dans le cas $m = 1$, le système se ramène à $\begin{cases} x = z \\ x = 2y \end{cases}$: l'intersection est alors la droite dirigée par $\vec{u}(2, 1, 2)$.
- ✕ Dans le cas $m = -2$, le système se ramène à $\begin{cases} y = 3x \\ y = z \end{cases}$: l'intersection est alors la droite dirigée par $\vec{u}(1, 3, 3)$

□

Exercice 6.13.

Dans le plan, on considère trois droites D_i d'équations respectives $(D_i) : a_i x + b_i y + c_i = 0$, pour $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$.

Montrer que les trois droites sont concourantes ou parallèles si et seulement si $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$.

Solution. Dire que $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ c'est dire que le système associé $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = 0 \end{cases}$ n'est pas de Cramer.

Or ce système possède déjà la solution nulle (car il est homogène), donc cela revient à dire qu'il admet au moins une solution (x_0, y_0, z_0) non nulle.

Comme l'ensemble des solutions d'un système homogène est un sous-espace vectoriel, cela revient à dire qu'il existe soit une solution du type $(x_0, y_0, 0)$ avec $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, soit une solution du type $(x_0, y_0, 1)$ (car si $u = (x_0, y_0, z_0)$ est solution avec $z_0 \neq 0$, on en déduit que $\frac{1}{z_0}u$ l'est également, ce qui permet d'obtenir une dernière coordonnée égale à 1).

- ✕ Le premier cas équivaut à dire que pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, on a

$$a_i x_0 + b_i y_0 = 0 \iff \begin{vmatrix} a_i & -y_0 \\ b_i & x_0 \end{vmatrix} = 0 \iff \det((a_i, b_i), (-y_0, x_0)) = 0$$

et donc que le vecteur (a_i, b_i) est colinéaire à $(-y_0, x_0)$, soit que les trois droites sont parallèles.

- ✕ Le second cas équivaut à dire que le point de coordonnées (x_0, y_0) est commun aux trois droites car il vérifie les trois équations, soit qu'elles sont concourantes.

□

Exercice 6.14.

D'après E3A 2012, Filière PC

1. Soient α et β deux réels strictement positifs. Vérifier que : $(1 + \alpha)(1 + \beta) \geq (1 + \alpha + \beta)$.

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = u_n v_n$ et on pose :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 \\ u_1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 \\ 0 & u_2 & 1 \end{vmatrix},$$

et, pour $n \geq 3$:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & u_2 & 1 & -v_3 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & -v_n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & u_n & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Calculer Δ_1 et Δ_2 .

3. Démontrer que :

$$\forall n \geq 3, \quad \Delta_n = \Delta_{n-1} + a_n \Delta_{n-2}.$$

4. Prouver que la suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

5. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Delta_n \leq \prod_{k=1}^n (1 + a_k)$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n = \prod_{k=1}^n (1 + a_k)$, $S_n = \sum_{k=1}^n \ln(1 + a_k)$ et on suppose dans cette question que la série

$$\sum_{n \geq 1} a_n \text{ converge.}$$

a. Prouver que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

b. Que peut-on en déduire pour la suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

7. On suppose maintenant que la suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

a. Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta_n \geq 1$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$, on pose $t_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}$.

Étudier la nature de la série : $\sum_{n \geq 2} t_n$.

c. Prouver alors que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge.

8. Quel résultat a-t-on finalement établi?

Solution.

1. Soient α et β deux réels positifs. En particulier $\alpha\beta > 0$. Il suit que

$$(1 + \alpha)(1 + \beta) = 1 + \alpha + \beta + \alpha\beta > 1 + \alpha + \beta,$$

ce qui donne l'inégalité demandée.

2. Sans difficulté.

$$\Delta_1 = 1 - (-u_1)v_1 = 1 + u_1v_1,$$

et (en développant par rapport à la première colonne)

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 \\ 0 & u_2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -v_2 \\ u_2 & 1 \end{vmatrix} - u_1 \times \begin{vmatrix} -v_1 & 0 \\ u_2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + u_1v_1 + u_2v_2.$$

3. Soit $n \geq 3$. On calcule Δ_n en développant par rapport à la dernière ligne. On obtient

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & u_2 & 1 & -v_3 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & -v_n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & u_n & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & u_2 & 1 & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & -v_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & u_{n-1} & 1 \end{vmatrix} - u_n \times \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & u_2 & 1 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 & u_{n-1} & -v_n \end{vmatrix} \end{aligned}$$

On reconnaît le premier déterminant comme étant Δ_{n-1} . Quant au second, on développe à nouveau, mais cette fois par rapport à la dernière colonne. On obtient“

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \Delta_{n-1} + u_n v_n \times \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 & \cdots & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 & \cdots & 0 \\ 0 & u_2 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -v_{n-2} \\ 0 & \cdots & \ddots & u_{n-2} & 1 \end{vmatrix} \\ &= \Delta_{n-1} + a_n \Delta_{n-2}, \end{aligned}$$

ce qui est bien la relation de récurrence demandée.

4. Commençons par montrer, par récurrence double, que tous les termes de la suite (Δ_n) sont strictement positifs.

✗ Initialisation. On a obtenu $\Delta_1 = 1 + u_1 v_1 > 0$ et $\Delta_2 = 1 + u_1 v_1 + u_2 v_2 > 0$ car les suites (u_n) et (v_n) sont à termes strictement positifs.

✗ Hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $\Delta_n > 0$ et $\Delta_{n+1} > 0$. Alors, d'après la question précédente, on peut écrire

$$\Delta_{n+2} = \Delta_{n+1} + a_{n+2} \Delta_n > 0$$

par hypothèse de récurrence (et du fait que $a_k > 0$ pour tout k pour la raison évoquée ci-avant). La récurrence est terminée.

On peut alors observer que, pour tout entier $n \geq 2$,

$$\Delta_{n+1} - \Delta_n = a_{n+1} \Delta_{n-1} > 0.$$

Comme, de plus, $\Delta_2 - \Delta_1 = u_2 v_2 > 0$, la suite (Δ_n) est bien (strictement) croissante.

5. C'est à nouveau une récurrence (double). En utilisant la Question 1. à l'envi car la suite (a_n) est à termes strictement positifs.

✗ Initialisation. D'une part, $\Delta_1 = 1 + a_1 \leq 1 + a_1$. D'autre part

$$\Delta_2 = 1 + a_1 + a_2 \leq (1 + a_1)(1 + a_2).$$

✗ Hérédité. Soit $n \geq 2$ fixé. Supposons que $\Delta_n \leq \prod_{k=1}^n (1 + a_k)$ et que $\Delta_{n+1} \leq \prod_{k=1}^{n+1} (1 + a_k)$. Alors

$$\begin{aligned} \Delta_{n+2} &= \Delta_{n+1} + a_{n+2} \Delta_n \\ &\stackrel{\text{H.R}}{\leq} \prod_{k=1}^{n+1} (1 + a_k) + a_{n+2} \prod_{k=1}^n (1 + a_k) = (1 + a_{n+1} + a_{n+2}) \prod_{k=1}^n (1 + a_k) \\ &\leq (1 + a_{n+1})(1 + a_{n+2}) \prod_{k=1}^n (1 + a_k) = \prod_{k=1}^{n+2} (1 + a_k), \end{aligned}$$

et termine la récurrence.

6. a. Commençons par observer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\ln(P_n) = S_n$ ou encore $P_n = \exp(S_n)$.

Par hypothèse, la série $\sum a_n$ converge, ce qui implique nécessairement que $a_n \rightarrow 0$. En particulier, on obtient, à l'aide d'un DL usuel, que

$$\ln(1 + a_n) \sim a_n, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Comme les suites (a_n) et $(\ln(1 + a_n))$ sont à termes positifs, le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs permet d'affirmer que $\sum a_n$ et $\sum \ln(1 + a_n)$ sont de même nature et donc convergentes. Dire que la série $\sum \ln(1 + a_n)$ converge signifie que sa suite des sommes partielles est convergente, et celle-ci n'est rien d'autre que la suite (S_n) . Notons alors s sa limite. Par composition avec la fonction $\exp$ continue (sur $\mathbb{R}$), on peut conclure que (P_n) converge et même que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \exp(s) = \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\right).$$

- b. La suite (P_n) est convergente, donc bornée (on peut même montrer qu'elle est majorée par sa limite car elle est croissante comme suite de produits de termes tous supérieurs à 1) mais il existe une constante $M \geq 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n \leq M$. Il suit donc, avec ce qu'on a déjà montré ci-avant, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\Delta_n \leq P_n \leq M.$$

La suite (Δ_n) est croissante et elle est aussi majorée. Le théorème de convergence monotone s'applique et permet d'affirmer qu'elle est convergente.

7. a. En reprenant la récurrence double de la Question 4., on montre de la même manière que $\Delta_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
b. Soit n entier tel que $n \geq 2$. Calculons la somme partielle. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n t_k &= \sum_{k=2}^n (\Delta_k - \Delta_{k-1}) \\ &= \Delta_n - \Delta_1 \quad \text{par télescopage} \end{aligned}$$

Comme, par hypothèse (Δ_n) est convergente, il en est de même pour la suite $\left(\sum_{k=2}^n t_k\right)_{n \geq 2}$ ce qui est la définition même de la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} t_n$.

- c. Soit $n \geq 3$. On sait que $a_n > 0$. Il suit que

$$0 < a_n \leq a_n \Delta_{n-2} = \Delta_n - \Delta_{n-1} = t_n.$$

Comme on a montré la convergence de la série $\sum t_n$ à la question précédente, par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on peut conclure que $\sum a_n$ converge.

8. On a établi l'équivalence suivante

$$(\Delta_n)_{n \geq 1} \text{ est convergente} \iff \sum_{n \geq 1} a_n \text{ converge}.$$

Ou encore que la suite des déterminants d'une matrice tridiagonale est convergente si et seulement si la série ayant pour terme général le produit des coefficients des sur et sous-diagonales est convergente.

□

Annales de l'oral

Exercice 6.15.

Oral Math I

Soient a et b deux réels distincts, $n \in \mathbb{N}^*$ et D_n le déterminant de taille n défini par :

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a+b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}.$$

1. Calculer D_1 et D_2 .
2. Que vaut D_n si $a = 0$ ou $b = 0$?
3. On suppose que a et b sont non nuls.
 - a. Donner une relation de récurrence entre D_{n+2} , D_{n+1} et D_n .
 - b. En déduire D_n en fonction de n .

Solution.

1. On a

$$D_1 = |a + b| = a + b, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - ab = a^2 + 2ab + b^2 - ab = a^2 + ab + b^2.$$

2. Si $a = 0$ ou $b = 0$, alors chaque terme $ab = 0$, donc la matrice devient triangulaire avec b sur la diagonale et 1 en dessous :

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a+b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

On a immédiatement $D_n = (a + b)^n$.

3. On développe D_n par la première ligne. On a :

$$D_n = (a + b)D_{n-1} - abD_{n-2}.$$

Cette relation de récurrence est valide pour $n \geq 2$, avec :

$$D_1 = a + b, \quad D_2 = a^2 + ab + b^2.$$

On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Le calcul donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}.$$

□

Exercice 6.16.**Oral Math II 2019**

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$. Calculer le déterminant de taille $n \times n$ suivant

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & n-2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ n-1 & n-2 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Solution.

1. C'est une récurrence facile de première année qu'on laisse au soin de la lectrice ou du lecteur.
2. On effectue des opérations sur les lignes pour simplifier la dernière ligne. Plus précisément,

$$L_n \leftarrow L_n - \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \cdot L_i$$

En effet, notant $L_{n,j}$ le j -ème coefficient de la n -ème ligne, on a

$$L_{n,j} - \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \cdot L_{i,j} = n-j - (n-j) = 0$$

pour $1 \leq j \leq n-1$ et, pour $j = n$,

$$L_{n,n} - \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)^2 = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = 1 - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = -\frac{(n-1)(n-2)(n+3)}{3} =: u_n.$$

Ainsi, le déterminant à calculer est celui de la matrice triangulaire :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & u_n \end{vmatrix}.$$

Il suit

$$D_n = -\frac{(n-1)(n-2)(n+3)}{3}.$$

□

Exercice 6.17.

Oral Math II 2015

On considère la matrice carrée M_n de taille n avec $2 \cos \theta$ sur la diagonale et des 1 de part et d'autre de cette diagonale, puis des 0.

1. Écrire la formule donnant le coefficient générique de cette matrice.
2. Montrer que $d_n = \det(M_n)$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
3. En déduire une expression de d_n en fonction de n et de θ .

Solution.

1. Notons $M_n = (M_{i,j})$. Si $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker, alors, on peut écrire

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad M_{i,j} = \cos(2\theta)\delta_{i,j} + \delta_{i-1,j} + \delta_{i+1,j}.$$

2. Soit $n \geq 2$. On développe par rapport à la première colonne puis son re-développe par rapport à la première colonne la matrice de droite.

$$\begin{aligned} d_n &= \begin{vmatrix} \cos(2\theta) & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \cos(2\theta) & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \cos(2\theta) & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & & \ddots & 1 & \cos(2\theta) & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cos(2\theta) \end{vmatrix} \\ &= \cos(2\theta) \begin{vmatrix} \cos(2\theta) & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & \cos(2\theta) & \ddots & \\ 0 & 1 & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & \cos(2\theta) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & \cos(2\theta) & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cos(2\theta) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cos(2\theta) \end{vmatrix} \\ &= \cos(2\theta)d_{n-1} - d_{n-2}, \end{aligned}$$

relation de récurrence linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est $x^2 - \cos(2\theta)x + 1 = 0$.

3. On résout donc l'équation caractéristique.

✗ Si $\theta \neq 0[\pi]$. On a deux solutions complexes conjuguées $r_1 = e^{i\theta}$ et $r_2 = e^{-i\theta}$. On sait alors qu'il existe deux constantes réelles λ, μ (à déterminer) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad d_n = \lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta).$$

Comme $d_1 = 2 \cos(\theta)$ et que $d_2 = 4 \cos^2(2\theta) - 1 = 2 \cos(2\theta) - 1$, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad d_n = \cos(n\theta) + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \sin(n\theta).$$

✕ Si $\theta \equiv 0[\pi]$, alors $\cos(\theta) = \pm 1$ est racine double de l'équation caractéristique et on sait qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad d_n = (\lambda + \mu n) \cos(\theta)^n.$$

Au final, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad d_n = (n+1) \cos(\theta)^n = \begin{cases} n+1, & \text{si } \theta \equiv 0[2\pi] \\ (n+1)(-1)^n, & \text{si } \theta \equiv \pi[2\pi] \end{cases}$$

□