7 Intégration généralisée - Éléments de solution

5 Sélection d'exercices - Travaux dirigés

5.1 Intégration sur un segment

Exercice 7.26.
Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition.

$$a : x \mapsto \tan x \qquad b : x \mapsto \frac{(\ln x)^3}{x} \qquad c : x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{3-x}}$$

$$d : x \mapsto \arcsin x \qquad e : x \mapsto \frac{1}{(x+1)(x+2)} \qquad f : x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1}$$

$$g : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2} \qquad h : x \mapsto \cos^6 x \qquad i : u \mapsto \frac{1}{\sqrt{u}+\sqrt{u^3}}$$

$$j : x \mapsto (1+x)\arctan(x) \qquad k : x \mapsto x^2 e^x \qquad l : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$$

$$m : x \mapsto x\sqrt{1+x} \qquad n : x \mapsto \frac{e^x}{\mathrm{ch}x+1} \qquad o : x \mapsto \frac{x^4}{x^4-1}$$

Solution. On note à chaque fois C la constante d'intégration.

a. On a $\tan = -\dfrac{\cos'}{\cos}$, donc $x \mapsto -\ln|\cos x| + C$ conviennent sur $\mathscr{D}_{\tan}$.

b. On reconnaît la dérivée d'une fonction composée. Les primitives de f sont définies sur $]0,+\infty[$ et sont de la forme $F : x \mapsto \dfrac{1}{4}(\ln(x))^4 + C$.

c. Sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,3[$. On pose $u = \sqrt{3-t}$. On se ramène ainsi à calculer une primitive de $u \mapsto \dfrac{1}{3-u^2}$. On décompose alors cette fraction en éléments simples, et on obtient à la fin $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3-x}-\sqrt{3}\right| - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3-x}+\sqrt{3}\right| + C$.

d. Sur $]-1,1[$ on peut intégrer par parties,

$$\int_*^x t' \times \arcsin t dt = x\arcsin x - \int_*^x \frac{t dt}{\sqrt{1-t^2}} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

On remarque que F se prolonge de façon $\mathcal{C}^1$ en -1 et en 1, donc le résultat est valable sur $]-1,1[$.

e. Sur $\mathbb{R}\backslash\{-2,-1\}$. On décompose en éléments simples : $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}$.
Les primitives de la fonction sont définies sur $]-\infty,-2[$, $]-2,-1[$, $]-1,+\infty[$ et sont sur chacun de ces intervalles de la forme $x \mapsto \ln|x+1| - \ln|x+2| + C$.

f. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+x+1>0$, la fonction est continue sur $\mathbb{R}$, elle y admet donc des primitives.

$$\int^x \frac{1}{t^2+t+1}\mathrm{d}t = \int^x \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\int^x \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2}))^2+1}\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)+C.$$

g. Sur $\mathbb{R}_+^*$. On procède par intégration par parties, les fonctions ln et $x\mapsto -\dfrac{1}{x}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$.
On obtient

$$\int_*^x \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{\ln(t)}{t}\right]_*^x + \int_*^x \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + C.$$

h. Sur $\mathbb{R}$. Après linéarisation : $\cos^6 x = \dfrac{1}{32}\left(\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10\right)$. Donc les primitives sont de la forme :

$$x\mapsto \frac{1}{192}\sin 6x + \frac{3}{64}\sin 4x + \frac{15}{64}\sin 2x + \frac{5}{16}x + C.$$

i. Sur $]0,+\infty[$. On pose $t=\sqrt{u}$, soit $u=t^2$, $\mathrm{d}u = 2t\mathrm{d}t$. D'où :

$$\int_*^x \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}+\sqrt{u^3}} = \int_*^{\sqrt{x}} \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} = 2\arctan\left(\sqrt{x}\right)+C.$$

j. Sur $\mathbb{R}$. Pour les calculer, on procède par intégration par parties, arctan et les polynômes étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On effectue au passage une division euclidienne de polynômes:

$$\begin{aligned}\int_*^x (t+1)\mathrm{Arctan}(t)\mathrm{d}t &= \left[\left(\frac{t^2}{2}+t\right)\mathrm{Arctan}(t)\right]_*^x - \int_*^x \frac{\frac{t^2}{2}+t}{1+t^2}\mathrm{d}t \\ &= \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\mathrm{Arctan}(x) - \int_*^x \frac{1}{2}+\frac{t}{1+t^2}-\frac{1}{2(t^2+1)}\mathrm{d}t + C \\ &= \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\mathrm{Arctan}(x) - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\mathrm{Arctan}(x) + C\end{aligned}$$

k. On effectue deux intégrations par parties successives. On obtient finalement $x\mapsto (x^2-2x+2)e^x+C$.

l. Sur $[-1,1]$. On utilise un changement de variable, $t=\sin(u) \iff u=\mathrm{Arcsin}(t)$ par exemple. Cela donne

$$\int_*^x \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = \int_*^{\mathrm{Arcsin}(x)} \sqrt{\cos^2(u)}\cos(u)\mathrm{d}u.$$

Or $\forall x\in[-1,1], \mathrm{Arcsin}(x)\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos(u)\geqslant 0$ sur $[0,\mathrm{Arcsin}(x)]$. Ainsi:

$$\begin{aligned}\int_0^x \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t &= \int_0^{\mathrm{Arcsin}(x)} \cos^2(u)\mathrm{d}u = \int_0^{\mathrm{Arcsin}(x)} \frac{1+\cos(2x)}{2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\mathrm{Arcsin}(x) + \frac{1}{4}\sin(2\mathrm{Arcsin}(x)) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Arcsin}(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C\end{aligned}$$

m. On peut faire une intégration par parties (dériver le x), ou encore poser $u=\sqrt{1+x}$. Dans les deux cas on trouve $x\mapsto \dfrac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}} - \dfrac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} + C$.

n. En posant $u=e^x$ on trouve $x\mapsto 2\ln(1+e^x) + \dfrac{2}{1+e^x} + C$.

o. En effectuant la division polynomiale puis en décomposan en éléments simples on obtient

$$x\mapsto \frac{x^4}{x^4-1} = 1 + \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)}.$$

En intégrant alors directement on obtient $x\mapsto x+\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| - \dfrac{1}{2}\arctan x + C$.

□

Exercice 7.27. **Lemme de Riemann-Lebesgue**

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ où $a\leq b$ sont des réels, à valeurs dans $\mathbb{C}$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)e^{int}\mathrm{d}t = 0.$$

Solution. On commence par une intégration par parties; les fonctions $t \mapsto e^{int}$ étant toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, on peut écrire

$$\int_a^b f(t)e^{int}\mathrm{d}t = \left[\frac{f(t)e^{int}}{in}\right]_a^b + \frac{i}{n}\int_a^b f'(t)e^{int}\mathrm{d}t.$$

Or, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ qui est un segment, donc il existe deux constantes positives M_1 et M_2 telles que

$$\forall t \in [a,b], \qquad |f(t)| \leq M_1, \qquad |f'(t)| \leq M_2.$$

Par inégalité triangulaire, il suit que

$$\left|\int_a^b f(t)e^{int}\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{n}|f(b)-f(a)| + \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t \leq \frac{2M_1 + M_2(b-a)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Exercice 7.28.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que (I_n) converge, et déterminer sa limite.
2. Déterminer un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.
3. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.

Solution.

1. On peut montrer la convergence de la suite de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1]$, $t^{n+1}\sqrt{1+t} \leqslant t^n\sqrt{1+t}$ d'où, par croissance de l'intégrale, $I_{n+1} \leqslant I_n$. Par positivité de l'intégrale, I_n est positif : on a une suite décroissante minorée, elle converge.
On peut aller plus vite en montrant la convergence en même temps que l'on calcule la limite, avec le théorème des gendarmes. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1]$, on a $0 \leqslant t^n\sqrt{1+t} \leqslant t^n\sqrt{2}$ d'où, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant I_n \leqslant \sqrt{2}\int_0^1 t^n\mathrm{d}t = \left[\frac{\sqrt{2}t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{n+1}.$$

En passant à la limite dans cette inégalité, on obtient la convergence vers 0 de la suite d'intégrales.

2. Une intégration par parties permet de refaire apparaître le terme en $\dfrac{t^{n+1}}{n+1}$ qui était bien important ci-dessus:

$$I_n = \left[\sqrt{1+t}\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t+1}}t^{n+1}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{n+1}J_n.$$

Il suffit de montrer que $J_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ (de la même manière que l'on a montré que $I_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$) pour pouvoir écrire

$$I_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{n+1}o(1) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\sqrt{2}}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

Donc $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}}{n}$.

3. On peut par exemple refaire une intégration par parties :

$$I_{n+1} = \left[t^{n+1}\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - (n+1)\frac{2}{3}\int_0^1 t^n \underbrace{(1+t)^{\frac{3}{2}}}_{(1+t)\sqrt{1+t}}\mathrm{d}t = \frac{2}{3}2^{\frac{3}{2}} - (n+1)\frac{2}{3}(I_n + I_{n+1}).$$

D'où $I_{n+1} = \dfrac{2}{2n+5}\left(2\sqrt{2} - (n+1)I_n\right)$.

□

Exercice 7.29.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n(t)\mathrm{d}t$.

1. Donner une relation entre I_n et I_{n+2}.
2. En déduire la limite de (I_n).

3. Calculer I_{2p} en fonction de p, puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, où

$$S_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}.$$

Solution.

1. On a

$$I_{n+2} = \int_0^{\pi/4} \tan^n t \cdot (\tan^2 t + 1 - 1)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/4} \tan^n t \cdot \tan' t\mathrm{d}t - I_n = \left[\frac{1}{n+1}\tan^{n+1} t\right]_0^{\pi/4} - I_n.$$

On a donc $I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1} - I_n$.

2. Comme $\tan\left(\left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right) \subset [0,1]$ on a $0 \leq \tan^{n+1} t \leq \tan^n t$ pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Par croissance de l'intégrale on en déduit $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$. Le théorème de la limite monotone assure que I_n possède une limite finie ℓ.

En passant alors à la limite dans la relation $I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1} - I_n$ on obtient $\ell = 0$.

3. Comme $I_0 = \dfrac{\pi}{4}$, la relation de récurrence permet de conjecturer la formule

$$I_{2p} = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^{p-1-k}}{2k+1} + (-1)^p \frac{\pi}{4},$$

que l'on prouverait aisément par récurrence.

On remarque alors

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} = (-1)^{n-1} I_{2n} + \frac{\pi}{4}.$$

Comme I_n tend vers 0, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{\pi}{4}$.

□

Exercice 7.30. **Oral Math II 2025**

On pose : $u_n = \displaystyle\int_0^1 (\ln(1+t))^n \, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que (u_n) est monotone, convergente, puis déterminer la valeur de sa limite.
2. Établir une relation entre u_{n+1} et u_n. En déduire que $(n+1)u_n \leq 2(\ln 2)^{n+1} \leq (n+2)u_n$.
3. Déterminer un équivalent simple de u_n. La série de terme général $\dfrac{u_n}{(\ln 2)^n}$ converge-t-elle?

Solution.

1. Pour tout $t \in [0,1]$, on a $\ln(1+t)^n \geq \ln(1+t)^{n+1}$ car $\ln(1+t) \leq \ln(2) < 1$. Par croissance de l'intégrale la suite (u_n) est décroissante. Étant minorée par 0 (par positivité de l'intégrale), elle est convergence d'après le théorème de convergence monotone. Un petit coup des gendarmes permet de trouver la limite. En effet, pour tout $t \in [0,1]$, $\ln(1+t) \leq \ln(2)$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leq u_n \leq \ln(2)^n \int_0^1 \mathrm{d}t = \ln(2)^n.$$

Et on a bien $u_n \to 0$ car $\ln(2)^n \to 0$ car $|\ln(2)| < 1$.

2. On procède par IPP. Ici il est intéressant de primitiver $u' : t \mapsto 1$ en $u(t) = t+1$. On obtient

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \int_0^1 \ln(t)^{n+1}\mathrm{d}t = \left[(t+1)\ln(1+t)^{n+1}\right]_0^1 - (n+1)\int_0^1 \ln(1+t)^n \mathrm{d}t \\ &= 2\ln(2)^{n+1} - (n+1)u_n. \end{aligned}$$

Comme (u_n) est décroissante et $u_{n+1} \geq 0$, on a

$$(n+1)u_n = -u_{n+1} + 2\ln(2)^{n+1} \leq 2\ln(2)^{n+1}$$

et

$$2\ln(2)^{n+1} - (n+1)u_n = u_{n+1} \leq u_n \iff 2\ln(2)^{n+1} \leq (n+1)u_n + u_n = (n+2)u_n,$$

ce qui donne bien l'encadrement demandé.

3. On déduit de l'encadrement précédent le nouvel encadrement

$$\frac{2\ln(2)^{n+1}}{n+2} \leq u_n \leq \frac{2\ln(2)^{n+1}}{n+1}$$

ce qui donne (en divisant chaque terme de l'encadrement et par théorème des gendarmes) que: $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\ln(2)^{n+1}}{n}$.

4. On a

$$\frac{u_n}{\ln(2)^n} \sim \frac{2\ln(2)}{n}$$

et $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Par critère d'équivalence pour les SATP, on peut conclure que la série diverge.

□

Exercice 7.31. **Oral Math II 2023**

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^1 \mathrm{e}^{x^n}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer u_1. Montrer que la suite (u_n) est monotone et convergente.
2. Montrer que : $\forall y \in [0,1], 1+y \leq \mathrm{e}^y \leq 1+(\mathrm{e}-1)y$. En déduire $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$.
3. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\sum (u_n - \ell)^\alpha$ est-elle convergente?

Solution.

1. Soit $x \in [0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x^{n+1} \leq x^n$. Par croissance de l'exponentielle, on a $0 \leq e^{x^{n+1}} \leq e^{x^n}$ et par croissance (et positivité) de l'intégrale $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 0 ; elle converge d'après le théorème de convergence monotone.

2. Soit $y \in [0,1]$ fixé. L'inégalité $1+y \leq e^y$ est une inégalité de convexité classique. Pour l'autre, on observe que

$$e^y = 1 + y\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{y^{k-1}}{k!} \leq 1 + y\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 1 + y(e-1).$$

En appliquant cette inégalité à $y = x^n$ (pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$), puis par croissance de l'intégrale, on obtient

$$1 + \frac{1}{n+1} = 1 + \int_0^1 x^n \mathrm{d}x \leq u_n \leq 1 + (e-1)\int_0^n x^n \mathrm{d}x = 1 + \frac{e-1}{n+1}.$$

Par théorème des gendarmes, on conclut que $u_n \to 1$.

3. De l'encadrement précédent, on déduit que

$$0 \leq \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq (u_n - 1)^\alpha \leq \left(\frac{e-1}{n+1}\right)^\alpha.$$

✗ Si $\alpha > 1$, alors $\sum \left(\frac{e-1}{n+1}\right)^\alpha$ est convergente et par critère de comparaison pour les SATP, $\sum (u_n-1)^\alpha$ converge.

✗ Si $\alpha \leq 1$, comme $\sum \frac{1}{(n+1)^\alpha}$ diverge, le critère de comparaison donne cette fois la divergence de la série $\sum (u_n-1)^\alpha$.

□

Exercice 7.32. **Oral Math II 2022**

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \int_0^{\cos^2(x)} \mathrm{Arccos}(\sqrt{t})\mathrm{d}t + \int_0^{\sin^2(x)} \mathrm{Arcsin}(\sqrt{t})\mathrm{d}t$.

1. Montrer que : $\forall t \in [0,1], \mathrm{Arccos}(t) + \mathrm{Arcsin}(t) = \frac{\pi}{2}$. Calculer $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
2. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$, paire, π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^1 \text{Arccos}(\sqrt{t})\mathrm{d}t$.

4. Retrouver la valeur de I par le changement de variable $\varphi(t) = \text{Arccos}(\sqrt{t})$.

Solution.

1. Montrons que $g : \ t \mapsto \arccos(t) + \arcsin(t)$ est constante sur $[0,1]$. C'est une fonction dérivable (somme de deux fonctions usuelles dérivables), et pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$g'(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 0.$$

Donc g est constante. On a donc

$$\forall t \in [0,1], \quad \arccos(t) + \arcsin(t) = g(0) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Il suit que

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{1/2} g(\sqrt{t})\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$

2. Les fonctions $\varphi : t \mapsto \arccos(\sqrt{t})$ et $\psi : t \mapsto \arcsin(\sqrt{t})$ sont toutes deux continues sur $\mathbb{R}_+$, elles admettent donc des primitives sur ce même intervalle. Notons Φ et Ψ la primitive de chacune qui s'annule en 0. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) \geq 0$, ainsi que $\sin^2(x) \geq 0$. On peut alors écrire, On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \Phi(\cos^2(x)) + \Psi(\sin^2(x)).$$

Comme Φ et Ψ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ (comme primitives de fonctions continues) et que $\cos^2, \sin^2$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, il suit que, par composition, f est encore de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, comme $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ et $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$, le passage au carré donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+\pi) = \Phi((-\cos(x))^2) + \Psi((-\sin(x))^2) = f(x).$$

Enfin, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(-x) = \Phi(\cos^2(-x)) + \Psi(\sin^2(-x)) = \Phi(\cos^2(x)) + \Psi((-\sin(x))^2) = f(x),$$

et donc f est paire.

3. On dérive. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2\sin(x)\cos(x)\varphi(\cos^2(x)) + 2\sin(x)\cos(x)\psi(\sin^2(x)) = 2\sin(x)\cos(x)\left(\psi(\sin^2(x)) - \varphi(\cos^2(x))\right) \\ &= 2\sin(x)\cos(x)\left(\arcsin(|\sin(x)|) - \arccos(|\cos(x)|)\right). \end{aligned}$$

Soit $x \in [0, \pi/2]$, alors $\cos(x) \geq 0$, $\sin(x) \geq 0$, et $\arcsin(\sin(x)) = x$, $\arccos(\cos(x)) = x$. Ainsi, $f'(x) = 0$ et f est constante sur $[0, \pi/2]$. Étant paire, elle est constante avec la même valeur sur $[-\pi/2, 0]$, donc sur $[-\pi/2, \pi/2]$. Par $\pi-$périodicité, f est constante partout sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

En particulier, $I = f(0) = \dfrac{\pi}{4}$.

4. On fait le changement de variable proposé : $u : t \mapsto \arccos(\sqrt{t})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ bijectif sur $]0,1[$ donc licite car l'intégrale est convergente. On a

$$u = \arccos(\sqrt{t}) \iff t = \cos^2(u)$$

et donc $\mathrm{d}t = -2\cos(u)\sin(u)\mathrm{d}u$. On obtient

$$I = \int_0^{\pi/2} 2\cos(u)\sin(u)u\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \sin(2u)u\mathrm{d}u = \text{Im}\left(\int_0^{\pi/2} e^{2iu}u\mathrm{d}u\right).$$

Or, par IPP,

$$\int_0^{\pi/2} e^{2iu}u\mathrm{d}u = \left[\frac{ue^{2iu}}{2i}\right]_0^{\pi/2} + \frac{i}{2}\int_0^{\pi/2} e^{2iu}\mathrm{d}u = \frac{i\pi}{4} + \frac{1}{4}(-1-1) = \frac{1}{4}(-2+i\pi).$$

Au final, on retrouve bien

$$I = \frac{\pi}{4}.$$

□

5.2 Intégration généralisée

Exercice 7.33.

Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes ainsi que leur valeur en cas de convergence.

$$i.\ \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}, \qquad ii.\ \int_1^{+\infty} \frac{t\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}, \qquad iii.\ \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\mathrm{d}x,$$
$$iv.\ \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\mathrm{d}x, \qquad v.\ \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{3^t}, \qquad vi.\ \int_0^{+\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x.$$

Exercice 7.34.

Calculer les intégrales suivantes.

$$i.\ \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^3}\mathrm{d}x \qquad ii.\ \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(2x)\mathrm{d}x \qquad iii.\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\mathrm{ch}(x)+1}\mathrm{d}x \qquad iv.\ \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\sqrt{t}}$$
$$v.\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{3+2e^{-t}+e^t} \qquad vi.\ \int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\mathrm{d}t \qquad vii.\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \qquad viii.\ \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$$

Solution.

i. L'intégrande est continue sur $[1,+\infty[$ donc l'intégrale n'est impropre qu'en $+\infty$.

Soit $X>0$. On calcule $\displaystyle\int_1^X \frac{\ln(x)}{x^3}dx$ par intégration par parties. On pose $u(x)=\ln(x)$ et $v(x)=-\frac{1}{2x^2}$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,X]$.

Ainsi

$$\int_1^X \frac{\ln(x)}{x^3}dx = \left[-\frac{\ln(x)}{2x^2}\right]_1^X + \int_1^X \frac{1}{2x^3}dx = -\frac{\ln(X)}{2X^2} - \frac{1}{4X^2} + \frac{1}{4}.$$

Cette fonction admet une limite en $+\infty$ et sa limite est $\frac{1}{4}$.

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^3}dx$ est convergente et sa valeur est $\frac{1}{4}$.

Autre rédaction possible avec le théorème d'intégration par parties des intégrales impropres.

On pose $u(x)=\ln(x)$ et $v(x)=-\frac{1}{2x^2}$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$. La fonction $x\mapsto u(x)v(x)$ admet pour limite 0 en 1 (elle y est continue). Elle admet par croissances comparées 0 pour limite en $+\infty$.

D'après le théorème d'intégration par parties pour les intégrales impropres, les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^3}dx$ et $\displaystyle-\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^3}dx$ ont même nature. La deuxième est une intégrale de Riemann convergente, donc la première est aussi convergente et

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^3}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^3}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$$

ii. L'intégrande est continue sur $[0,+\infty[$ donc l'intégrale n'est impropre qu'en $+\infty$.

Soit $X>0$. On calcule $\displaystyle\int_0^X e^{-x}\cos 2x\mathrm{d}x$ par intégration par parties.

On pose $u(x)=\cos 2x$ et $v(x)=-e^{-x}$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,X]$.

Ainsi

$$\int_0^X e^{-x}\cos 2x\mathrm{d}x = \left[-e^{-x}\cos 2x\right]_0^X - 2\int_0^X e^{-x}\sin 2x\mathrm{d}x.$$

On réitère le procédé en intégrant l'exponentielle et en dérivant le sinus :

$$\int_0^X e^{-x}\cos 2x\mathrm{d}x = 1 - e^{-X}\cos 2X + 2e^{-X}\sin(2X) - 4\int_0^X e^{-x}\cos 2x\mathrm{d}x.$$

D'où $\displaystyle 5\int_0^X e^{-x}\cos 2x\mathrm{d}x = 1 - e^{-X}\cos 2X + 2e^{-X}\sin(2X)$ et $\displaystyle\int_0^X e^{-x}\cos 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{5}(1 - e^{-X}\cos 2X + 2e^{-X}\sin(2X))$.

Cette fonction admet une limite en $+\infty$ et sa limite est $\frac{1}{5}$. Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin 2x\mathrm{d}x$ est convergente et vaut $\frac{1}{5}$.

iii. L'intégrande est continue sur $[0,+\infty[$ donc l'intégrale n'est impropre qu'en $+\infty$.
Soit $X>0$, on calcule $\displaystyle\int_0^X \frac{1}{2\mathrm{ch}(x)+1}\mathrm{d}x = \int_0^X \frac{e^x}{(e^x)^2+e^x+1}\mathrm{d}x$. On fait le changement de variable $u=e^x$, ce qui est possible car exponentielle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned}\int_0^X \frac{1}{2\mathrm{ch}(x)+1}\mathrm{d}x &= \int_1^{e^X} \frac{1}{u^2+u+1}\mathrm{d}u = \int_1^{e^X} \frac{1}{(u+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}u = \frac{4}{3}\int_1^{e^X} \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}u+\frac{1}{\sqrt{3}})^2+1}\mathrm{d}u\\ &= \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}(\frac{2}{\sqrt{3}}u+\frac{1}{\sqrt{3}})\right]_1^{e^X} = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}(\frac{2}{\sqrt{3}}e^X+\frac{1}{\sqrt{3}}) - \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}(\sqrt{3})\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}(\frac{2}{\sqrt{3}}e^X+\frac{1}{\sqrt{3}}) - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Cette fonction admet une limite en $+\infty$ et sa limite est $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{9}$. Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{2\mathrm{ch}(x)+1}\mathrm{d}x$ est convergente et sa valeur est $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{9}$.

iv. $t\longmapsto \dfrac{1}{t^2+\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,+\infty[$. L'intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$.
On a $\dfrac{1}{t^2+\sqrt{t}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ et $\dfrac{1}{t^2+\sqrt{t}} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$: dans les deux cas Riemann assure la convergence.
Pour le calcul, on peut poser le changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif et strictement monotone $u=\sqrt{t}$, ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\sqrt{t}} = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^3+1}.$$

Une décomposition en éléments simples permet d'écrire $\dfrac{1}{u^3+1} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{u+1} - \dfrac{u-2}{u^2-u+1}\right)$ mais attention : ici pas question de séparer les deux morceaux, car chacun d'entre eux donne une intégrale divergente...
En appliquant alors les méthodes d'intégration des fractions rationnelles on obtient que $u\longmapsto \dfrac{1}{u^3+1}$ admet pour primitive sur $]0,+\infty[$ la fonction $u\longmapsto \dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{u+1}{\sqrt{u^2-u+1}}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(u-\dfrac{1}{2}\right)\right)$.
On en déduit alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\sqrt{t}} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}.$$

v. $t\longmapsto \dfrac{1}{3+2e^{-t}+e^t}$ est continue sur $]-\infty,+\infty[$, donc l'intégrale est impropre en $-\infty$ et $+\infty$.
$\dfrac{1}{3+2e^{-t}+e^t} \underset{+\infty}{\sim} e^{-t}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ converge.
$\dfrac{1}{3+2e^{-t}+e^t} \underset{-\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}e^t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^t\mathrm{d}t$ converge (poser $u=-t$), donc l'intégrale converge au voisinage de $-\infty$.
L'intégrale est donc convergente.
Pour le calcul, on peut poser le changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif et strictement monotone $u=e^t$, ce qui donne $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{3+2e^{-t}+e^t} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+3u+2} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(u+1)(u+2)}$.
Une décomposition en éléments simples donne $\dfrac{1}{u^2+3u+2} = \dfrac{1}{u+1} - \dfrac{1}{u+2}$, dont une primitive sur $[0,+\infty[$ est $u\longmapsto \ln\left(\dfrac{u+1}{u+2}\right)$ (cette fois encore ne pas séparer les deux intégrales, toutes deux divergentes).
On obtient finalement $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{3+2e^{-t}+e^t} = \ln 2$.

vi. $t\longmapsto \dfrac{\ln(1-t^2)}{t^2}$ est continue sur $]0,1[$, donc l'intégrale est impropre en 0 et en 1.
On a $\dfrac{\ln(1-t^2)}{t^2} \underset{0}{\sim} -1$, donc la fonction intégrée se prolonge par continuité en la borne finie 0, par conséquent elle est intégrable en 0 (l'intégrale est faussement impropre en 0).

$\dfrac{\ln(1-t^2)}{t^2} = \dfrac{1}{t^2}\left(\ln(1-t)+\ln(1+t)\right) \underset{1}{\sim} \ln(1-t)$ et

$$\int_{1/2}^{1} \ln(1-t)\mathrm{d}t = \int_0^{1/2} \ln(u)\mathrm{d}u$$

en posant $u = 1-t$, qui réalise une bijection $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone de $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$ sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$. Or $\displaystyle\int_0^{1/2} \ln(u)\mathrm{d}u$ converge, ce qui prouve que l'intégrale de départ est aussi convergente en 1, et finalement convergente.
Pour le calcul, on effectue une intégration par parties en posant $u(t) = \ln(1-t^2)$ et $v(t) = -\dfrac{1}{t}$, qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$.
Or le crochet $[u(t)v(t)]_0^1$ converge en 0, mais diverge en 1 : on fait donc l'intégration par parties indiquée sur $[0,a]$ avec $a \in]0,1[$, le crochet ayant pour limite 0 en 0, ce qui donne, *via* une décomposition en éléments simples,

$$\int_0^a \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\mathrm{d}t = -\frac{\ln(1-a^2)}{a} - 2\int_0^a \frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t = -\frac{\ln(1-a^2)}{a} - \int_0^a \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t - \int_0^a \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t.$$

Ainsi,

$$\int_0^a \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{(1-a)\ln(1-a)}{a} - \frac{a+1}{a}\ln(1+a).$$

Or $(1-a)\ln(1-a) \underset{a\to 1^-}{\longrightarrow} 0$ (croissances comparées), donc

$$\int_0^a \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\mathrm{d}t \underset{a\to 1^-}{\longrightarrow} -2\ln(2).$$

Cela prouve $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\mathrm{d}t = -2\ln(2)$.

vii. La fonction intégrée est continue sur $[0,+\infty[$, donc l'intégrale n'est impropre qu'en $+\infty$.
La fonction $\varphi : x \mapsto \sqrt{x}$ est bijective, strictement croissante, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, donc le théorème de changement de variable appliqué à φ permet de conclure que les intégrales I et $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2e^{-u}\mathrm{d}u$ ont la même nature et la même valeur en cas de convergence. La seconde est une intégrale de référence qui converge vers 2. D'où le résultat.

Ainsi l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ converge et sa valeur est 2.

viii. La fonction intégrée est continue sur $]0,+\infty[$, donc l'intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$.
Étude en 0 : $\ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right) = \ln(t^2+1) - \ln(t^2) = \ln(t^2+1) - 2\ln(t) \underset{0}{=} -2\ln(t) + o(1)$. Donc $\ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right) \underset{0}{\sim} -2\ln(t)$, fonction positive dont l'intégrale impropre de référence converge en 0. Ainsi, l'intégrale impropre converge en 0.
Étude en $+\infty$: $\dfrac{1}{t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$, fonction positive dont l'intégrale impropre de Riemann converge en $+\infty$. Par équivalence, l'intégrale impropre converge en $+\infty$.
On pose $u(t) = t$ et $v(t) = \ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
La fonction $t \mapsto u(t)v(t)$ admet pour limite 0 en 0 (croissances comparées) et $+\infty$ (car équivalent à $\frac{1}{t}$). Le théorème d'intégration par parties donne alors

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = 0 - \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+\dfrac{1}{t^2}}\frac{-2}{t^3}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t = \pi.$$

□

Exercice 7.35.

Déterminer la nature des intégrales suivantes

$$i.\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+|\cos t|}\mathrm{d}t, \qquad ii.\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t\,(1-t)}}\mathrm{d}t, \qquad iii.\ \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}\mathrm{d}t,$$

$$iv.\ \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t+1)}{1+\sqrt{t}}\mathrm{d}t, \qquad v.\ \int_0^1 \sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t, \qquad vi.\ \int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{t^3+1}\mathrm{d}t$$

$$vii.\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin t + \cos 2t}{(t+1)^2}\mathrm{d}t, \qquad viii.\ \int_0^1 \frac{\sqrt{1-\cos t}}{\ln(1-t)}\mathrm{d}t, \qquad ix.\ \int_0^{+\infty} \left(2t^2 - 1 - \sqrt{4t^4-4t^2+2}\right)\mathrm{d}t.$$

Solution.

i. L'intégrande est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc l'intégrale n'est impropre qu'en $+\infty$.
Or $\dfrac{1}{1+|\cos t|} \geqslant \dfrac{1}{2}$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{2}\mathrm{d}t$ diverge grossièrement.

ii. $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t\,(1-t)}}$ est continue sur $]0,1[$, donc l'intégrale est impropre en 0 et en 1.
De plus l'intégrande est positive sur $]0,1[$.
$\dfrac{1}{\sqrt{t\,(1-t)}} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$: donc l'intégrale converge en 0 par le théorème de comparaison et par Riemann.
De même on a $\dfrac{1}{\sqrt{t\,(1-t)}} \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$: l'intégrale converge en 1.
D'où la convergence de l'intégrale considérée.

iii. $t \longmapsto \dfrac{\ln t}{1-t}$ est continue sur $]0,1[$, donc l'intégrale est impropre en 0 et en 1.
De plus l'intégrande est de signe constant (négative) sur $]0,1[$.
$\dfrac{\ln t}{1-t} \underset{0}{\sim} \ln t < 0$ donc l'intégrale converge en 0 par équivalence avec une fonction intégrable.
$\dfrac{\ln t}{1-t} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} -1$ donc l'intégrale est faussement impropre en 1 et par suite convergente.

iv. L'intégrande est continue sur $[1,+\infty[$, donc l'intégrale n'est impropre qu'en $+\infty$.
De plus la fonction considérée est positive sur $[1,+\infty[$.
Or on a

$$\frac{\ln(t+1)}{1+\sqrt{t}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} \underset{+\infty}{\geqslant} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

donc l'intégrale diverge par comparaison avec une fonction de Riemann non intégrable.

v. $t \longrightarrow \sin\dfrac{1}{t}$ est continue sur $]0,1]$, et sur cet intervalle on a $\left|\sin\dfrac{1}{t}\right| \leqslant 1$. Or $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}t$ converge, donc $t \longrightarrow \sin\dfrac{1}{t}$ est intégrable sur $]0,1]$: cela prouve que $\displaystyle\int_0^1 \sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t$ converge.

vi. $t \longrightarrow \dfrac{t\ln t}{t^3+1}$ est continue sur $]0,+\infty[$, donc l'intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$.
On a $\dfrac{t\ln t}{t^3+1} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc l'intégrale est faussement impropre en 0. De plus $0 \underset{+\infty}{\leqslant} \dfrac{t\ln t}{t^3+1} \underset{+\infty}{\leqslant} \dfrac{1}{t^{3/2}}$ donc l'intégrale converge en $+\infty$ par comparaison avec une fonction de Riemann intégrable.

vii. $t \longmapsto \dfrac{\sin t + \cos 2t}{(t+1)^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.
Or

$$\left|\frac{\sin t+\cos 2t}{(t+1)^2}\right| \underset{+\infty}{\leqslant} \frac{2}{t^2}$$

la fonction est intégrable et donc l'intégrale est convergente.

viii. $t \longmapsto \dfrac{\sqrt{1-\cos t}}{\ln(1-t)}$ est continue sur $]0,1[$, donc l'intégrale est impropre en 0 et en 1.
Déjà on a

$$\frac{\sqrt{1-\cos t}}{\ln(1-t)} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 0$$

donc l'intégrale est faussement impropre en 1.
De plus on a

$$\frac{\sqrt{1-\cos t}}{\ln(1-t)} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(prendre des équivalents du numérateur et du dénominateur via des DL) donc l'intégrale est aussi faussement impropre en 0.
D'où la convergence.

ix. $t \longmapsto 2t^2 - 1 - \sqrt{4t^4 - 4t^2 + 2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.
Or

$$2t^2 - 1 - \sqrt{4t^4 - 4t^2 + 2} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{4t^2} < 0$$

(utiliser la quantité conjuguée ou un développement asymptotique après avoir mis t^4 en facteur dans la racine). On en déduit que l'intégrale converge, par comparaison à une fonction de Riemann intégrable.

x. $t \longmapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc l'intégrale est impropre en $-\infty$ et en $+\infty$.
Par parité de f, on se ramène à une seule étude en $+\infty$. Pour tout $t \geqslant 1$, $t \leqslant t^2$ donc $0 \leqslant e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ converge, on conclut alors par théorème de comparaison (les fonctions sont positives): l'intégrale converge.

□

Exercice 7.36. **Oral Math II 2018**

1. Justifier que $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\mathrm{d}t$ converge.

2. Montrer que $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\mathrm{d}t$ converge et que $I = J$.

3. Calculer $I + J$. En déduire la valeur de I.

Solution.

1. Comme, pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(t) > 0$, par composition de fonctions usuelles continues, $f : t \mapsto \ln(\sin(t))$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. L'intégrale est donc impropre en 0.
Par ailleurs, pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\ln(\sin(t)) \leq 0$ donc f est de signe constant et, au voisinage de 0,

$$\ln(\sin(t)) = \ln(t + o(t)) = \ln(t) + o(\ln(t)), \quad \text{donc} \quad \ln(\sin(t)) \sim \ln(t)$$

et on sait que $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ converge. Par comparaison, on peut conclure que I est une intégrale convergente.

2. On pose $t = \dfrac{\pi}{2} - u$, changement de variable $\mathscr{C}^1$ qui réalise une bijection strictement décroissante de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, qui vérifie $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$ et $\cos(t) = \sin(u)$.
Donc $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\mathrm{d}t$ et $-\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(u))(-\mathrm{d}u) = I$ sont de même nature.
Comme I converge , on peut donc conclure que J converge et, par changement de variable, $J = I$.

3. Les deux intégrales I et J convergent donc, par linéarité, on a :

$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\ln(\sin(t)) + \ln(\cos(t))]\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)\cos(t))\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2}\sin(2t)\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\pi}{2}\ln(2) + K, \end{aligned}$$

où $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.

On pose $t = \frac{u}{2}$, changement de variable $\mathscr{C}^1$ qui réalise une bijection strictement croissante de $[0, \pi[$ dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, qui vérifie $\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u$.
Donc K et $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin(u))\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u$ sont convergentes et égales.

Par la relation de Chasles et linéarité, on a :

$$K = \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(u))\mathrm{d}u}_{=I} + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(u))\mathrm{d}u.$$

On pose enfin $u = \pi - t$, changement de variable $\mathscr{C}^1$ qui réalise une bijection strictement décroissante de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, qui vérifie $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$.
Donc $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(u))\mathrm{d}u$ et $-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))(-\mathrm{d}t) = I$ convergent et sont égales. On en déduit que $K = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}I = I$ et que $I + J = -\frac{\pi}{2}\ln(2) + I$. Donc

$$I = J = -\frac{\pi}{2}\ln(2).$$

□

Exercice 7.37. **Oral Mines-Télécom 2025**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$.

1. Montrer que a_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Étudier la monotonie de la suite (a_n).
3. Montrer que la suite (a_n) converge.
4. Trouver une relation entre a_{n+1} et a_n.
5. Calculer a_1.

Solution.

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^3)^n}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. On a

$$\frac{1}{(1+t^3)^n} \sim \frac{1}{t^{3n}}, \quad t \to +\infty.$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3n}}$ converge par Riemann car $3n > 1$. Par critère d'équivalence a_n est bien une intégrale convergente et la suite est bien définie.

2. Soit $t \geq 0$. Comme, $\dfrac{1}{(1+t^3)^{n+1}} \leq \dfrac{1}{(1+t^3)^n}$, la croissance de l'intégrale donne que la suite est décroissante.

3. Étant clair, par positivité de l'intégrale, que $a_n \geq 0$, la suite est minorée et décroissante : elle converge d'après le théorème de convergence monotone.

4. On commence par un changement de variables en posant $t^3 = u$, d'où $t = u^{1/3}$ et $\mathrm{d}t = \frac{1}{3}u^{-2/3}\mathrm{d}u$. Ainsi :

$$a_n = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \frac{u^{-2/3}}{(1+u)^n}\mathrm{d}u.$$

Ensuite, on fait une intégration par parties.

$$\int_0^{+\infty} u^{-2/3}(1+u)^{-n}\mathrm{d}u = \left[3u^{1/3}(1+u)^{-n}\right]_0^{+\infty} + 3n\int_0^{+\infty} u^{1/3}(1+u)^{-n-1}\mathrm{d}u = 3n\int_0^{+\infty} \frac{u^{1/3}}{(1+u)^{n+1}}\mathrm{d}u.$$

On observe que $u^{1/3} = u^{-2/3} \cdot u$, ce qui donne :

$$a_n = n\int_0^{+\infty} \frac{u^{-2/3}u}{(1+u)^{n+1}}\mathrm{d}u = n\int_0^{+\infty} \frac{u^{-2/3}\left((1+u)-1\right)}{(1+u)^{n+1}}\mathrm{d}u.$$

D'après la définition de a_n et a_{n+1}, on a :

$$3a_n = n(3a_n - 3a_{n+1}),$$

ou encore

$$na_{n+1} = \left(n - \frac{1}{3}\right)a_n.$$

5. Pour calculer a_1, déterminons a, b tels que, pour tout $t \geq 0$,

$$\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{(1+t)(1-t+t^2)} = \frac{a}{1+t} + \frac{bt+c}{1-t+t^2}.$$

On trouve $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$ et $c = \frac{2}{3}$. Soit $A > 0$.

$$\begin{aligned}
\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} &= \frac{1}{3}\int_0^A \left(\frac{1}{1+t} - \frac{t-2}{1-t+t^2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\left(\ln(1+A) - \frac{1}{2}\ln(1-A+A^2) + \frac{3}{2}\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{(t-1/2)^2+3/4}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\ln(1+A) - \frac{1}{2}\ln(1-A+A^2) + 2\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\ln(1+A) - \frac{1}{2}\ln(1-A+A^2) + \sqrt{3}\left(\arctan\left(\frac{2A-1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right)\right) \\
&\xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9} = a_1.
\end{aligned}$$

□

Exercice 7.38. **Oral Math II 2025**

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $x \in \mathbb{R}$. Établir la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} P(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$.

2. Justifier que $\varphi_P : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} P(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\varphi_P'(x)$.

3. Soit l'application $f_x : P \in \mathbb{R}[X] \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} P(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$, et pour tout $k \in \mathbb{N}, e_k = X^k$.

a. Déterminer $f_x(e_0)$ et donner le lien entre $f_x(e_k)$ et $f_x(e_{k-1})$.
b. Montrer que f_x induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution.

1. Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $x \in \mathbb{R}$ fixés. Posons $g : t \longmapsto P(t)\mathrm{e}^t$, fonction continue sur $]-\infty, x]$. Ainsi, l'intégrale qui définit φ_P est impropre en $-\infty$. Par croissance comparée

$$g(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right), \quad t \to -\infty.$$

Par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} P(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$ converge.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ fixé. Par Chasles, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{x} P(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} g(t)\mathrm{d}t + \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$$

Or, g est continue sur $\mathbb{R}$, donc, par le théorème fondamental de l'analyse, $G : x \longmapsto \int_{-\infty}^{x} P(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.
À ce titre, G est dérivable (sur $\mathbb{R}$) et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $G'(x) = g(x)$. En particulier, G est solution de l'équation différentielle $y' = P(x)e^x$. On sait donc qu'on peut écrire (voir le cours sur les équations différentielles), $G(x) = Q(x)e^x$ avec $\deg(Q) = \deg(P)$ car 1 n'est pas solution de l'équation caractéristique.
Par produit de fonction dérivables, φ_P est alors dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi_P'(x) = -\mathrm{e}^{-x}G(x) + \mathrm{e}^{-x}g(x) = -\varphi_P(x) + P(x).$$

3. **a.** On a immédiatement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_x(e_0) = \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^x = 1 = e_0(x)$ et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, un intégration par parties donne, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f_x(e_k) = \mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x} t^k\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x}\left(\left[t^k\mathrm{e}^t\right]_{-\infty}^{x} - k\int_{-\infty}^{x} t^{k-1}\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t\right) = e_k(x) - kf_x(e_{k-1})(x).$$

b. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'intégrale généralisée convergente, on a :

$$f_x(P+\lambda Q) = \mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x} P(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t + \lambda \mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x} Q(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = f_x(P) + \lambda f_x(Q)$$

Donc f_x est linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. D'après la Question **2.**,

$$f_x(P) = \mathrm{e}^{-x}Q(x)\mathrm{e}^x = Q(x);$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg(Q) = \deg(P)$. Donc $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], f_x(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Ainsi, f_x induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

□

Exercice 7.39. **La fonction Gamma**

Pour tout réel α, on pose $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction Γ.
2. Établir une relation entre $\Gamma(\alpha+1)$ et $\Gamma(\alpha)$.
3. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution.
Pour tout α réel, on pose $\varphi_\alpha : t \mapsto t^{\alpha-1}e^{-t}$.

1. Pour tout α réel, la fonction φ_α est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
On a $\varphi_\alpha(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissance comparée, ce qui prouve que $\displaystyle\int_*^{+\infty} \varphi_\alpha(t)\mathrm{d}t$ converge (par le théorème de comparaison) quelle que soit la valeur de α.
Si $\alpha - 1 \geq 0 \iff \alpha \geq 1$, la fonction φ_α est définie et continue en 0. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^* \varphi_\alpha(t)\mathrm{d}t$ converge (elle n'est pas impropre).
Enfin, si $\alpha < 1$, on a $\varphi_\alpha(t) \underset{t\to0}{\sim} t^{\alpha-1} = \dfrac{1}{t^{1-\alpha}}$.
Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^* \varphi_\alpha(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $1-\alpha < 1 \iff 0 < \alpha$ (par théorème de comparaison avec une fonction de Riemann).
Finalement, Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Les fonctions $u : t \mapsto t^\alpha$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et le produit $u(t)v(t)$ possède des limites finies (et nulles) lorsque t tend vers 0 et $+\infty$ (par croissance comparée). On peut donc effectuer l'intégration par parties suivantes:

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha+1) &= \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t}\mathrm{d}t \\ &= \left[-t^\alpha e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \alpha t^{\alpha-1}e^{-t}\mathrm{d}t \\ &= \alpha\Gamma(\alpha)\end{aligned}$$

3. Comme $\Gamma(1) = 1$, on en déduit alors aisément $\Gamma(n) = (n-1)!$ en raisonnant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

□

Exercice 7.40. **Oral Math II 2019, 2023**

1. Montrer $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{1+e^{-2x}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k e^{-2kx} + \frac{(-1)^n e^{-2nx}}{1+e^{-2x}}$.

2. En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}(x)} = 2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{2k+1} + I_n$, où I_n est une intégrale telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

3. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$.

4. Quel est le domaine de définition de la fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} x^k$ où x est un réel?

Solution.

1. Il suffit de reconnaître la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k e^{-2kx} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(-e^{-2x}\right)^k = \frac{1-\left(-e^{-2x}\right)^n}{1-\left(-e^{-2x}\right)} = \frac{1}{1+e^{-2x}} - \frac{(-1)^n e^{-2nx}}{1+e^{-2x}}.$$

2. L'intégrale est impropre en $+\infty$. On remarque déjà

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}(x)} = \int_0^{+\infty} \frac{2}{e^x + e^{-x}} \mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}} \mathrm{d}x.$$

Or on a $\frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}} \underset{+\infty}{\sim} e^{-x}$, et on sait que $\int_*^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x$ converge. Le théorème de comparaison des équivalents montre alors que $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}(x)}$ converge.
En utilisant la question précédente on peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}(x)} &= 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}} \mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{+\infty} e^{-x} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k e^{-2kx} + \frac{(-1)^n e^{-2nx}}{1+e^{-2x}} \right) \mathrm{d}x \\
&= 2\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{+\infty} (-1)^k e^{-(2k+1)x} \mathrm{d}x + 2\int_0^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-(2n+1)x}}{1+e^{-2x}} \mathrm{d}x \\
&= 2\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\frac{-1}{2k+1} e^{-(2k+1)x} \right]_0^{+\infty} + I_n \\
&= 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} + I_n
\end{aligned}$$

où on a posé $I_n = 2(-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(2n+1)x}}{1+e^{-2x}} \mathrm{d}x$. Il ne reste donc plus qu'à montrer $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$. On écrit pour cela :

$$|I_n| = 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(2n+1)x}}{1+e^{-2x}} \mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(2n+1)x}}{1+0} \mathrm{d}x = 2\left[\frac{-1}{2n+1} e^{-(2n+1)x} \right]_0^{+\infty} = \frac{2}{2n+1}.$$

Et comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{2n+1} = 0$, on en déduit le résultat.

3. En passant à la limite dans la question précédente il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}(x)},$$

ce qui prouve au passage la convergence de la série. On peut alors calculer l'intégrale via le changement de variable $u = e^x$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}(x)} = \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1} \mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2+1} \mathrm{d}u = [\arctan u]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

4. La règle de d'Alembert permet de montrer que le rayon de convergence est $R = 1$. Donc f est déjà définie sur $]-1,1[$, et elle n'est pas définie sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. On vient de plus de prouver la convergence en $x = -1$. Mais en $x = 1$ la série diverge, puisque $f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1}$ a pour terme général $\frac{1}{2k+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2k}$ et ce dernier est le terme général d'une série divergente (par Riemann). Le domaine de définition de f est donc $[-1,1[$.

Enfin, on reconnait en f le développement en série entière de arctan, de sorte que $\forall x \in]-1,1[,\ \arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} x^k$.

Et on a prouvé à la question 3 que cette égalité est encore valable en $x=-1$.

□

Exercice 7.41. **Intégrale de Dirichlet, Oral Math II 2026**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)\sin(2nt)}{\sin(t)} \mathrm{d}t$ et $v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{t}\ \mathrm{d}t$.

1. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t$ converge.
2. Montrer que les intégrales u_n et v_n convergent.
3. Montrer que u_n ne dépend pas de n et calculer sa valeur.
4. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.
5. En déduire la valeur de l'intégrale I.

Solution.

1. La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$: l'intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$. On remarque tout d'abord que

$$\frac{\sin(t)}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1,$$

Il n'y a donc pas de problème de convergence en 0 (l'intégrale est faussement impropre).
En $+\infty$, on effectue une intégration par parties sur $[1,+\infty[$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{-\cos(t)}{t}\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t.$$

Le crochet converge car $\cos(t)$ est bornée et $\frac{1}{t} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. De plus, l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$$

converge absolument par comparaison avec l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$, qui converge.
On en déduit que l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$$

converge.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les fonctions

$$t \mapsto \frac{\cos(t)\sin(2nt)}{\sin(t)}, \quad \text{et} \quad t \mapsto \frac{\sin(2nt)}{t}$$

sont continues sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$: l'intégrale u_n est impropre en 0. Or

$$\frac{\cos(t)\sin(2nt)}{\sin(t)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{2nt}{t} = 2n.$$

La fonction intégrée est donc prolongeable par continuité en 0, et l'intégrale u_n converge (intégrale faussement impropre).
De même, l'intégrale v_n est impropre en 0, et

$$\frac{\sin(2nt)}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 2n.$$

La fonction intégrée est donc également prolongeable par continuité en 0, ce qui prouve la convergence de v_n.

3. On utilise la formule de linéarisation :

$$\cos(t)\sin(2nt) = \frac{1}{2}\left(\sin((2n+1)t) + \sin((2n-1)t)\right).$$

On remarque ensuite que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2kt),$$

et

$$\frac{\sin((2n-1)t)}{\sin(t)} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1}\cos(2kt).$$

En combinant ces deux égalités, on obtient :

$$\frac{\cos(t)\sin(2nt)}{\sin(t)} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1}\cos(2kt) + \cos(2nt).$$

On peut alors calculer directement :

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\sum_{k=1}^{n-1}\cos(2kt) + \cos(2nt)\right) \mathrm{d}t \qquad = \left[t + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin(2kt)}{k} + \frac{\sin(2nt)}{2n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

En effet, tous les termes en sinus s'annulent aux bornes puisque $\sin(k\pi) = 0$ pour tout entier k. On a donc bien montré que u_n ne dépend pas de n, et que

$$u_n = \frac{\pi}{2}.$$

4. On utilise la formule de linéarisation

$$\cos(t)\sin(2nt) = \frac{1}{2}\left(\sin((2n+1)t) + \sin((2n-1)t)\right).$$

On obtient alors

$$u_n = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t) + \sin((2n-1)t)}{\sin(t)}\mathrm{d}t.$$

On utilise maintenant la formule

$$\frac{\sin((2n+1)t) + \sin((2n-1)t)}{\sin(t)} = 2\sum_{k=-(n-1)}^{n}\cos(2kt).$$

Ainsi,

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=-(n-1)}^{n}\cos(2kt)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\sum_{k=1}^{n-1}\cos(2kt) + \cos(2nt)\right)\mathrm{d}t$$

$$= \left[t + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin(2kt)}{k} + \frac{\sin(2nt)}{2n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\sin(k\pi) = 0$.
On a donc bien montré que u_n ne dépend pas de n, et que

$$u_n = \frac{\pi}{2}.$$

5. On cherche à montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0.$$

On écrit

$$u_n - v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos(t)}{\sin(t)} - \frac{1}{t}\right)\sin(2nt)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(2nt)\mathrm{d}t,$$

où on a posé

$$f(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)} - \frac{1}{t}.$$

On remarque que

$$f(t) \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{2t}{3},$$

de sorte que f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. Ce prolongement est en fait de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: pour $t \neq 0$

$$f'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sin^2(t)} = \frac{1}{t^2}\left(1 - \frac{1}{1 - \frac{t^2}{3} + o(t^2)}\right) \sim \frac{1}{3}, \qquad t \to 0$$

et le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$ s'applique.
On peut alors appliquer le **lemme de Riemann-Lebesgue (Exercice 7.27)**, et on en déduit bien que

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0.$$

6. D'après la question précédente et le résultat de la Question **3.**, on a

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi}{2}.$$

Or, en effectuant le changement de variable $u = 2nt$, on obtient

$$v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{n\pi} \frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u.$$

Comme l'intégrale I converge d'après la Question **1.**, on peut passer à la limite lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u = I.$$

et on déduit finalement que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

□

5.3 Permutations sommes et intégrales

Exercice 7.42.

On souhaite dans cet exercice démontrer l'égalité suivante :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^3}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2}.$$

Pour cela, on part de l'égalité

$$\frac{1}{1+t^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{t^{3n+3}}$$

valide pour $t > 1$.

1. Expliquer pourquoi on ne peut pas appliquer le théorème de permutation du cours.

2. Pour $n \geq 0$ et $t > 1$, on pose $R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{t^{3k+3}}$. Démontrer que $\int_1^{+\infty} R_n(t)\mathrm{d}t$ tend vers 0, et conclure.

Solution. On pose, pour $n \geq 0$ et $t > 1$,

$$u_n(t) = \frac{1}{t^{3n+3}}.$$

II est alors facile de remarquer que

$$\int_1^{+\infty} u_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{3n+2}$$

1. On voudrait écrire que

$$\int_1^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_1^{+\infty} (-1)^n u_n(t)\mathrm{d}t.$$

Pour pouvoir appliquer le théorème d'interversion, il faudrait que la série de terme général $\int_1^{+\infty} |(-1)^n u_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. Mais

$$\int_1^{+\infty} |(-1)^n u_n(t)|\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} u_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{3n+2}$$

qui est le terme général d'une série divergente.

2. Par le critère spécial des séries alternées, pour tout $n \geq 1$ et tout $t \geq 1$, on a

$$|R_n(t)| \leq \frac{1}{t^{3n+3}}.$$

Pour prouver que $\int_1^{+\infty} R_n(t)dt$ converge vers 0 , on peut remarquer que

$$\int_1^{+\infty} |R_n(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3n+3}} = \frac{1}{3n+2}.$$

Ainsi, si on pose $S_n(t) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k(t)$, on a

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} &= \int_1^{+\infty} S_n(t)\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} R_n(t)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n}\int_1^{+\infty}(-1)^k u_k(t)\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} R_n(t)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{3k+2} + \int_1^{+\infty} R_n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{3k+2}\end{aligned}$$

□

Exercice 7.43.

1. Démontrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}\mathrm{d}t = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$.
2. Plus généralement, démontrer que, pour tous $a, b > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-at}}{1-e^{-bt}}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(a+bn)^2}.$$

Solution.

1. Remarquons d'abord que la fonction $t \mapsto \frac{t}{e^t-1}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$: en effet, elle est continue sur $]0,+\infty[$, elle se prolonge par continuité en 0 (car $e^t - 1 \sim_0 t$) et au voisinage de l'infini, elle est équivalente à te^{-t} qui est intégrable sur $[1,+\infty[$ (elle est négligeable devant t^{-2} par exemple). L'idée ensuite est de reconnaitre dans $\frac{1}{e^t-1}$ la somme d'une série géométrique. Pour cela, on factorise par e^t et on trouve,

$$\frac{t}{e^t-1} = \frac{te^{-t}}{1-e^{-t}} = \sum_{n=1}^{+\infty} te^{-nt}.$$

Cette égalité est valable dès que $e^{-t} < 1$, c'est-à-dire dès que $t > 0$. Posons $f_n(t) = te^{-nt}$. On a alors :

✗ Chaque f_n est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, intégrable sur ce même intervalle, et

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} te^{-nt}\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2} \text{ (intégration par parties).}$$

✗ Pour tout $t > 0$, la série $\sum_n f_n(t)$ converge vers $t \mapsto \frac{t}{e^t-1}$ qui est bien continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

On peut donc appliquer le théorème de permutation somme et intégrale, et on trouve

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}\mathrm{d}t = \sum_{n\geq 1}\int_0^{+\infty} te^{-nt}\mathrm{d}t = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}.$$

2. La méthode est exactement identique et les détails sont laissés aux lecteurs. On trouve une somme à partir de 0 et non de 1 car

$$\frac{te^{-at}}{1-e^{-bt}} = \sum_{n\geq 0} te^{-(a+nb)t}.$$

□

Annexe : Intégrale de Gauss et intégrales de Wallis

On renvoie à la solution en ligne, disponible **ici**.