8 Réduction - Éléments de solution

5 Sélection d'exercices - Travaux dirigés

Exercice 8.9.

Diagonaliser, si c'est possible, les matrices suivantes.

$$A=\begin{pmatrix}3&0&-1\\0&2&0\\2&0&0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-3&-2&5\\1&0&-1\\-2&-2&4\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}1&a&a\\-1&1&-1\\1&0&2\end{pmatrix}, F=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}, J=\begin{pmatrix}2&-4&1\\-1&-1&1\\5&-5&-2\end{pmatrix}.$$

Solution.

✗ $\chi_A(X)=\begin{vmatrix}X-3&0&1\\0&X-2&0\\-2&0&X\end{vmatrix}=(X-2)\begin{vmatrix}X-3&1\\-2&X\end{vmatrix}=(X-2)(X^2-3X+2)=(X-2)^2(1-X).$

Soit $U=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. On a

$$AU=2U\iff\begin{cases}x-z=0\\x-z=0\end{cases}$$

donc $E_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x-z=0\}=\text{Vect}((1,0,1),(0,1,0))$.
De même

$$AU=U\iff\begin{cases}2x-z=0\\y=0\\2x-z=0\end{cases}$$

donc $E_1=\text{Vect}((1,0,2))$.
Ainsi χ_A est scindé et pour $\lambda\in\{1,2\}$, la dimension de E_λ est égale à la multiplicité de λ dans χ_A. Donc A est diagonalisable.

Finalement A est semblable à $D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et une matrice de passage est $P=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$.

✗ On a

$$\chi_C(X)=\begin{vmatrix}X+3&2&-5\\-1&X&1\\2&2&X-4\end{vmatrix}\underset{C_3\leftarrow C_1+C_2+C_3}{=}\begin{vmatrix}3+X&2&X\\-1&X&X\\2&2&X\end{vmatrix}=X\begin{vmatrix}3+X&2&1\\-1&X&1\\2&2&1\end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_1\leftarrow L_1-L_3\\L_2\leftarrow L_2-L_3}}{=}X\begin{vmatrix}1+X&0&0\\-3&X-2&0\\2&2&1\end{vmatrix}=X(1+X)(X-2)$$

.
χ_C est scindé à racines simples, donc C est diagonalisable.

Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a

$$CU = 0 \iff \begin{cases} -3x - 2y + 5z = 0x - z = 0 \\ -2x - 2y + 4z = 0 \end{cases}$$

donc $E_0 = \text{Vect}((1,1,1))$.
De même

$$CU = 2U \iff \begin{cases} -5x - 2y + 5z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \\ -2x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

donc $E_2 = \text{Vect}((1,0,1))$.
Enfin

$$CU = -U \iff \begin{cases} -2x - 2y + 5z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ -2x - 2y + 5z = 0 \end{cases}$$

donc $E_2 = \text{Vect}((1,-1,0))$.

Finalement C est semblable à $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et une matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

✗ On a

$$\chi_E(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -a & -a \\ 1 & X-1 & 1 \\ -1 & 0 & X-2 \end{vmatrix} \underset{C_3 - C_2 \to C_3}{=} \begin{vmatrix} X-1 & -a & 0 \\ 1 & X-2 & 2-X \\ -1 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2) \begin{vmatrix} X-1 & -a & 0 \\ 1 & X-1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_2 + L_3 \to L_2}{=} (X-2) \begin{vmatrix} X-1 & -a & 0 \\ 0 & X-1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (X-2)(X-1)^2.$$

Calcul des sous-espaces propres : on pose $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$EU = U \iff \begin{cases} ay + az = 0 \\ -x - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

et pour la résolution il faut distinguer deux cas.

- Si $a \neq 0$ on obtient $E_1 = \text{Vect}((1,1,-1))$ de dimension strictement inférieure à la multiplicité de 1 comme racine de χ_E, donc E n'est pas diagonalisable dans ce cas.
- Si $a = 0$ on obtient $E_1 = \text{Vect}((1,1,-1),(1,0,-1))$ de dimension égale à la multiplicité de 1 comme racine de χ_E, donc E est diagonalisable dans ce cas.

✗ On a

$$\chi_F(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & -1 \\ -1 & X-1 & -1 \\ -1 & -1 & X-1 \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{=} \begin{vmatrix} X & -X & 0 \\ -1 & X-1 & -1 \\ -1 & -1 & X-1 \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & X-1 & -1 \\ -1 & -1 & X-1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{C_2 \leftarrow C_2 - C_1}{=} -X \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & X-2 & -1 \\ -1 & -2 & X-1 \end{vmatrix} = X(X^2 - 3X) = X^2(X-3)$$

.

Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$FU = 0 \iff x + y + z = 0$$

donc $E_0 = \text{Vect}((1,-1,0),(1,0,-1))$.
De même

$$FU = 3U \iff \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

donc $E_3 = \text{Vect}(((1,1,1))$.
Ainsi χ_F est scindé et pour $\lambda \in \{0,3\}$, la dimension de E_λ est égale à la multiplicité de λ dans χ_E. Donc F est diagonalisable.
Finalement F est semblable à $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et une matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

✗ On a : $\chi_J(X) = \begin{vmatrix} X-2 & 4 & -1 \\ 1 & X+1 & -1 \\ -5 & 5 & X+2 \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2+C_1}{=} \begin{vmatrix} X-2 & X+2 & -1 \\ 1 & X+2 & -1 \\ -5 & 0 & X+2 \end{vmatrix}$.

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{=} (X+2)\begin{vmatrix} X-3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -5 & 0 & X+2 \end{vmatrix}$$

$$= (X+2)^2(X-3)$$

On a $u(x,y,z) \in \text{Ker}(2I_3 + J) \iff \begin{cases} 4x - 4y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$ donc $\text{Ker}(J + 2I_3) = \text{Vect}(\underbrace{(1,1,0)}_{u})$ donc J n'est pas diagonalisable puisque la dimension de E_{-2} est différente de la multiplicité de -2 dans χ_J.
De même $u(x,y,z) \in \text{Ker}(3I_3 - J) \iff \begin{cases} -x - 4y + z = 0 \\ 5x - 5y - 5z = 0 \end{cases}$ donc $\text{Ker}(J - 3I_3) = \text{Vect}(\underbrace{(1,0,1)}_{w})$.
On peut toutefois trigonaliser J puisque son polynôme caractéristique est scindé. Recherchons alors un vecteur $v = (x,y,z)$ tel que (u,v,w) soit libre et tel que la matrice représentant le même endomorphisme f que J dans la base (u,v,w) soit de la forme $J' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
On prend pour u et w les vecteurs propres trouvés ci-dessus, et il reste à trouver un vecteur v tel que $f(v) = u - 2v$, ce qui équivaut à $\begin{cases} 2x - 4y + z = 1 - 2x \\ -x - y + z = 1 - 2y \\ 5x - 5y - 2z = -2z \end{cases}$ qui admet par exemple la solution $v = (0,0,1)$.
Ainsi J est donc semblable à J' avec pour matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

□

Exercice 8.10.

On pose $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M est diagonalisable. En déduire M^n pour tout entier n.
2. On définit trois suites $(u_n),(v_n),(w_n)$ en posant

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 1 \\ w_0 = -1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}(-v_n + w_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 2v_n - w_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{2}(-u_n - v_n + 2w_n) \end{cases}$$

Exprimer u_n, v_n, w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Solution.

1. On a

$$\chi_M(X) = \frac{1}{2^3}\begin{vmatrix} 2X & 1 & -1 \\ -1 & 2X-2 & 1 \\ 1 & 1 & 2X-2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2^3}\begin{vmatrix} 0 & 4X^2-4X+1 & -1+2X \\ -1 & 2X-2 & 1 \\ 0 & 2X-1 & 2X-1 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + 2XL_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{2^3}\begin{vmatrix} 4X^2-4X+1 & -1+2X \\ 2X-1 & 2X-1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{2X-1}{2^3}\begin{vmatrix} 4X^2-4X+1 & -1+2X \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2X-1}{2^3}(4X^2-6X+2) = (X-1)\left(X-\frac{1}{2}\right)^2$$

On en déduit $\text{Sp}(M) = \{\frac{1}{2}, 1\}$.
On obtient ensuite $\text{Ker}(M - I_3) = E_1 = \text{Vect}(1,-1,1)$ et $\text{Ker}(M - \frac{1}{2}I_3) = E_{\frac{1}{2}} = \text{Vect}((1,-1,0),(1,0,1))$. Comme

$\dim(E_1) + \dim(E_{\frac{1}{2}}) = \dim(\mathbb{R}^3)$ on en déduit que M est diagonalisable.
On a donc $M = P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$. Après calculs il vient

$$P^{-1} = \begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&-1\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

On en déduit pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$M^n = P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2^n}&0\\0&0&\frac{1}{2^n}\end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix}-1+\frac{1}{2^{n-1}}&-1+\frac{1}{2^n}&1-\frac{1}{2^n}\\1-\frac{1}{2^n}&1&-1+\frac{1}{2^n}\\-1+\frac{1}{2^n}&-1+\frac{1}{2^n}&1\end{pmatrix}.$$

2. Posons $X_n = \begin{pmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{pmatrix}$. On a $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = MX_n$, de quoi on déduit $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = M^nX_0$.
On déduit alors de la valeur de M^n que

$$u_n = -3 + \frac{1}{2^{n-2}},\quad v_n = 3 - \frac{1}{2^{n-1}},\quad w_n = -3 + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

□

Exercice 8.11.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $A = \begin{pmatrix}-1&\alpha&\alpha\\1&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$

1. A est-elle diagonalisable ? Trigonalisable ?

2. Montrer que, si $\alpha \neq 0$, A est semblable à $T = \begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$, et déterminer $P \in \mathscr{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = T$.

3. Si $\alpha \neq 0$, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution.

1. On montre $\chi_A(X) = (1+X)^3$ en commençant par effectuer l'opération $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$, puis en factorisant par $1+X$, et enfin en effectuant l'opération $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$.
Si A était diagonalisable, elle aurait comme unique valeur propre -1, donc serait semblable à $-I_3$, donc serait égale à $-I_3$, ce qui est faux. Donc A n'est pas diagonalisable.
Mais χ_A est scindé, donc A est trigonalisable.

2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
A est semblable à T si et seulement si $\exists (v_1, v_2, v_3)$ base de $\mathbb{R}^3$, $f(v_1) = -v_1, f(v_2) = -v_2 + v_1, f(v_3) = -v_3 + v_2$.
Soit $v = (x, y, z)$. $f(v) = -v \Leftrightarrow x = 0$ et $\alpha(y+z) = 0$. Donc $v_1 = (0, 1, -1)$ convient.
$f(v) = -v + v_1 \Leftrightarrow x = 1$ et $\alpha(y+z) = 0$. Donc $v_2 = (1, 0, 0)$ convient.
$f(v) = -v + v_2 \Leftrightarrow x = 0$ et $\alpha(y+z) = 1$. Donc $v_2 = (0, \frac{1}{\alpha}, 0)$ convient.
Enfin $\det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, v_3) = \dfrac{1}{\alpha} \neq 0$, donc (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
Par construction, la matrice de f dans (v_1, v_2, v_3) est T et A est semblable à T, et

$$P = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&\frac{1}{\alpha}\\-1&0&0\end{pmatrix}$$

convient.

3. Après calculs on on obtient $P^{-1} = \begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&\alpha&\alpha\end{pmatrix}$.
$T = -I_3 + N$, avec $N = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. On voit $N^2 = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $N^3 = 0$, donc $\forall k \geqslant 3, N^k = 0$.

$-I_3$ et N commutent, donc par la formule du binôme de Newton, on a pour $n \geqslant 2$:

$$T^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} N^k = (-1)^n I_3 + (-1)^{n-1} nN + (-1)^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} N^2.$$

On en déduit

$$A^n = PT^nP^{-1} = (-1)^n I_3 + (-1)^{n-1} n \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & -\alpha & -\alpha \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -n\alpha & -n\alpha \\ -n & 1 + \alpha\frac{n(n-1)}{2} & \alpha\frac{n(n-1)}{2} \\ n & -\alpha\frac{n(n-1)}{2} & -\alpha\frac{n(n-1)}{2} + 1 \end{pmatrix}.$$

□

Exercice 8.12. **Suite récurrence linéaire d'ordre 3**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = u_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 11u_{n+2} - 39u_{n+1} + 45u_n \end{cases}.$$

En posant $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$, déterminer u_n en fonction de n.

Solution. On a $U_{n+1} = AU_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 45 & -39 & 11 \end{pmatrix}$ et donc $U_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ par récurrence immédiate.
Après calculs du polynôme caractéristique de A, on trouve les valeurs propres 3, double, et 5, simple.
Après calculs il vient $E_5 = \text{Vect}\,((1,5,25))$ et $E_3 = \text{Vect}\,((1,3,9))$: A est seulement trigonalisable car $\dim E_3 = 1 < m_3 = 2$.
Cherchons alors une base (u,v,w) dans laquelle la matrice associée au même endomorphisme f que A s'écrive

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

En utilisant les vecteurs propres trouvés ci-dessus, on peut prendre $u = (1,3,9)$, $w = (1,5,25)$. Il reste à trouver v tel que $f(v) = u + 3v$, et après traduction de cette relation sous forme de système d'équation on voit que l'on peut par exemple choisir $v = (0,1,6)$.

On obtient alors $A = PTP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 9 & 6 & 25 \end{pmatrix}$.

En posant $V_n = P^{-1}U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, la relation $U_n = A^nU_0$ s'écrit $V_n = T^nV_0$.

On a $T = D + N$ avec $D = \text{diag}\,(3,3,5)$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On vérifie aisément que ces deux matrices commutent et que $N^2 = \mathbb{0}$ (on dit que N est nilpotente d'indice 2), de quoi on déduit à l'aide du binôme de Newton:

$$T^n = D^n + nD^{n-1}N = \begin{pmatrix} 3^n & n\,3^{n-1} & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}.$$

La relation $V_n = T^nV_0$ donne ainsi

$$\begin{cases} x_n = \lambda\,3^n + \mu n\,3^{n-1} \\ y_n = \mu\,3^n \\ z_n = \nu\,5^n \end{cases},$$

avec $(\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{R}^3$ (ce sont les coordonnées de V_0).
Et comme $U_n = PV_n$ on en déduit $u_n = x_n + z_n = \lambda\,3^n + \mu n\,3^{n-1} + \nu\,5^n$.

Les conditions initiales conduisent alors à

$$\begin{cases} \lambda+\nu=1 \\ 3\lambda+\mu+5\nu=1 \\ 9\lambda+6\mu+25\nu=1 \end{cases}$$

ce qui donne $\begin{cases} \lambda=0 \\ \mu=-4 \\ \nu=1 \end{cases}$.

La suite cherchée est $u_n=-4n\,3^{n-1}+5^n$ □

Exercice 8.13.

Trigonaliser les matrices suivantes, sous la forme T indiquée.

1. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. $C=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ où a,b,c sont à déterminer.

Solution.

1. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.
A est semblable à T si et seulement si il existe une base (v_1,v_2,v_3) de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est T.
Cela équivaut à dire qu'il existe une base (v_1,v_2,v_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que $f(v_1)=v_1, f(v_2)=2v_2, f(v_3)=2v_3+v_2$
Soit $v=(x,y,z)$. On a $f(v)=v \Leftrightarrow 2x-y+z=0, x-y+z=0 \Leftrightarrow x=0, y=z$ donc $v_1=(0,1,1)$ convient.
De même $f(v)=2v \Leftrightarrow x-y+z=0, 2x-2y+z=0, x-y=0 \Leftrightarrow z=0, y=x$ donc $v_2=(1,1,0)$ convient.
Enfin $f(v)=2v+v2 \Leftrightarrow x-y+z=1, 2x-2y+z=1, x-y=0 \Leftrightarrow z=0, y=x$ donc $v_3=(0,0,1)$ convient.
Finalement $\det(v_1,v_2,v_3)=-1$, donc (v_1,v_2,v_3) est bien une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est T.

2. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à C.
C est semblable à T si et seulement si il existe une base (v_1,v_2,v_3) de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est T. Cela équivaut à dire qu'il existe une base (v_1,v_2,v_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que $f(v_1)=2v_1, f(v_2)=2v_2+av_1, f(v_3)=2v_3+bv_1+cv_2$.
Soit $v=(x,y,z)$. On a $f(v)=2v \Leftrightarrow x+2y+z=0, -x+z=0$ donc $v_1=(1,-1,1)$ convient.
Choisissons par exemple $a=1$ (la seule valeur qui ne convient pas est $a=0$). On a $f(v)=2v+v_1 \Leftrightarrow x+2y+z=1, -x+z=-1, x-z=1$ donc $v_2=(1,0,0)$ convient.
Prenons $v_3=(0,0,1)$ (à ce stade tout vecteur v_3 qui complète (v_1,v_2) en une base de $\mathbb{R}^3$ conviendra, car la troisième colonne est quelconque).
On a $\det(v_1,v_2,v_3)=1$ donc (v_1,v_2,v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
Enfin on vérifie $f(v_3)=(1,1,1)=2v_3+(1,1,-1)=2v_3-v_1+(2,0,0)=-v_1+2v_2+2v_3$, donc la matrice de f dans la base (v_1,v_2,v_3) est $T=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

□

Exercice 8.14.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f\in\mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable.
Montrer $\mathrm{Ker}(f^2)=\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f^2)=\mathrm{Im}(f)$.

Solution.

✗ $\mathrm{Ker}(f)\subset\mathrm{Ker}(f^2)$: cette inclusion est toujours vraie, puisque si $x\in\mathrm{Ker}(f)$ on a $f(x)=0$, d'où $f(f(x))=f(0)=0$.

✗ $\mathrm{Im}(f^2)\subset\mathrm{Im}(f)$: cette inclusion est toujours vraie, puisque si $y\in\mathrm{Im}(f^2)$, il existe $x\in E$ tel que $y=f^2(x)$. On en déduit $y=f(f(x))$, soit $\exists a\in E,\ y=f(a)$ puisque $a=f(x)$ convient, ce qui prouve $y\in\mathrm{Im}(f)$.

✗ $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$: f étant diagonalisable, il existe une base dans laquelle la matrice de f est

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Le système $MX = 0$ étant diagonal, on en déduit directement que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \mathrm{Card}\{i \in [\![1, n]\!];\ \lambda_i = 0\}$.
Mais dans cette même base f^2 possède pour matrice

$$M^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit comme ci-dessus que $\dim(\mathrm{Ker}(f^2)) = \mathrm{Card}\{i \in [\![1, n]\!];\ \lambda_i^2 = 0\} = \dim(\mathrm{Ker}(f))$.
D'où $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$ car on a une inclusion et même dimension.

✗ $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f)$: La formule du rang donne

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) \quad \text{et} \quad \dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f^2)) + \mathrm{rg}(f^2).$$

Or on a $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f^2))$, d'où $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$. Comme on avait déjà $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$ et que les dimensions sont les mêmes, on en déduit $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f)$.

□

Exercice 8.15. **Équation matricielle**

On considère l'application définie par $\Psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P'' + 2P' + P \end{array}$

1. Montrer $\Psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$.
2. Donner la matrice A de Ψ dans la base canonique.
3. Chercher les éléments propres de A. Est-elle diagonalisable?
4. Trouver une matrice B telle que $A = B^2$.

Solution.

1. La linéarité ne pose pas de difficulté. Pour prouver que Ψ est un endomorphisme, on remarque déjà que si $P \in \mathbb{R}_3[X]$ alors $\Psi(P) \in \mathbb{R}[X]$, et de plus

$$\deg(\Psi(P)) \leq \max(\deg(P''), \deg(2P'), \deg(P)) \leq \max(1, 2, 3) = 3.$$

D'où le résultat.

2. En calculant l'image par Ψ des vecteurs de la base canonique $1, X, X^2, X^3$ de $\mathbb{R}_3[X]$ on obtient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. La matrice A étant triangulaire supérieure, on voit immédiatement que ses valeurs propres sont ses termes diagonaux : $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$. Mais $\mathrm{Ker}(A - I_3)$ n'est pas de dimension $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$ (car cette matrice n'est pas nulle), donc A n'est pas diagonalisable.

4. Le produit de deux matrices triangulaire supérieure est encore triangulaire supérieure, et de plus les termes diagonaux du produit sont les produits des termes diagonaux, il est donc tentant de chercher B sous la forme $B = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a alors :

$$B^2 = A \iff \begin{cases} 2a & & & & & & = 2 \\ & 2b & & +ad & & & = 2 \\ & & 2c & & +ea & +bf & = 0 \\ & & & 2d & & & = 4 \\ & & & & 2e & +df & = 6 \\ & & & & & 2f & = 6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a & & & & & & = 1 \\ & 2b & & +2 & & & = 2 \\ & & 2c & & +e & +3b & = 0 \\ & & & 2d & & & = 4 \\ & & & & 2e & +6 & = 6 \\ & & & & & f & = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a & & & & & & = 1 \\ & b & & & & & = 0 \\ & & c & & & & = 0 \\ & & & d & & & = 2 \\ & & & & e & & = 0 \\ & & & & & f & = 3 \end{cases}$$

Finalement on obtient $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque. Il n'est pas exclu que l'équation $B^2 = A$ possède d'autres solutions, qui ne soient pas triangulaires supérieures.

□

Exercice 8.16.

Soit $a \neq 0$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} en fonction de A et de I_3.
2. Montrer que si λ est valeur propre de A, alors $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$.
3. En déduire que A est diagonalisable et donner une matrice diagonale semblable à A.

Solution.

1. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & a & a^2 \\ 1/a & 2 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 2 \end{pmatrix} = A + 2I_3$. On en déduit $A^2 - A = 2I_3 \iff \frac{1}{2}(A - I_3)A = I_3$ ce qui prouve que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3)$.

2. Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. On a $AX = \lambda X$ et par suite $A^2X = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda^2 X$. On en déduit, comme $X \neq 0$:

$$A^2 - A - 2I_3 = 0 \Rightarrow (A^2 - A - 2I_3)X = 0 \Rightarrow \lambda^2 X - \lambda X - 2X = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - \lambda - 2)X = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

3. On a $\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$, donc -1 et 2 sont les seules valeurs propres possibles de A.
Or $A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1/a & 1 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1 (car $C_2 = aC_1$, $C_3 = a^2C_1$ et $C_1 \neq 0$), donc $\dim \operatorname{Ker}(A + I_3) = 2$.
Et $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & a & a^2 \\ 1/a & -2 & a \\ 1/a^2 & 1/a & -2 \end{pmatrix}$ vérifie $a^2C_1 + aC_2 = -C_3$, donc $\operatorname{rg}(A - 2I_3) \leq 2$ puis $\dim \operatorname{Ker}(A - 2I_3) \geq 1$. On en déduit $\dim \operatorname{Ker}(A - 2I_3) = 1$, car la somme des dimensions des sous-espaces propres est toujours inférieure à $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.
Finalement, cela prouve que la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, et donc que A est diagonalisable. La matrice diagonale associée est celle dont les termes diagonaux sont $-1, -1, 2$.

Remarque. On peut également étudier la diagonalisabilité de cette matrice de façon habituelle, en évaluant directement son polynôme caractéristique.

□

Exercice 8.17.

Pour tout entier n non nul on considère $A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1+\frac{2}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer, en effectuant le moins de calculs possibles, que 1 et $1+\frac{1}{n}$ sont les valeurs propres de A_n.
2. La matrice A_n est-elle inversible? Diagonalisable?
3. Pour tout entier $n > 0$ on pose $B_n = \prod_{k=1}^{n} A_k$.

   La matrice A_n est-elle inversible? Diagonalisable (et si oui, déterminer sa forme diagonale et la matrice de passage associée)?

Solution.

1. On a $A_n - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & 0 \end{pmatrix}$.
   On observe $C_2 = -C_1 + C_3$, et $C_1, C3$ ne sont visiblement pas colinéaires, donc $\mathrm{rg}(A_n - I_3) = 2$ et par suite $\dim(\mathrm{Ker}(A_n - I_3)) = 1$.
   On a $A_n - \left(1+\frac{1}{n}\right) I_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \end{pmatrix}$. Cette matrice est visiblement de rang 1, et par suite $\dim(\mathrm{Ker}(A_n - \left(1+\frac{1}{n}\right) I_3)) = 2$.
   La somme des dimensions de ces sous-espaces propres est égale à $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, or la somme des dimensions de tous les espaces propres ne peut excéder $\dim(\mathbb{R}^3)$, donc il n'y a pas d'autre valeur propre: $\mathrm{Sp}(A_n) = \{1, 1+\frac{1}{n}\}$.

2. Cela prouve que la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, et donc que A_n est diagonalisable.
   Par ailleurs $0 \notin \mathrm{Sp}(A_n)$ donc A_n est inversible.

3. B_n est inversible en tant que produit de matrices inversibles.
   On a prouvé en 1 que $E_1 = \mathrm{Vect}(1,1,-1)$ et $E_{1+\frac{1}{n}} = \mathrm{Vect}((0,1,-1),(1,1,0))$. On voit ainsi que les vecteurs propres de A_n ne dépendent pas de n. C'est grâce à cette propriété que B_n sera diagonalisable.
   En effet, en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (qui ne dépend pas de n), on a $A_k = P \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\frac{1}{k} & 0 \\ 0 & 0 & 1+\frac{1}{k} \end{pmatrix}}_{D_k} P^{-1}$, et par suite :

$$B_n = \prod_{k=1}^{n} A_k = \prod_{k=1}^{n} P D_k P^{-1} = P \left(\prod_{k=1}^{n} D_k \right) P^{-1}$$
$$= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right) \end{pmatrix} P^{-1}$$

   D'où le résultat.

□

Exercice 8.18. **Extrait Devoir Maison n°4 - Automne 2025**

1. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Montrer que A est diagonalisable.

2. Le résultat reste-t-il vrai si $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ symétrique ?

Solution.

1. Soit $A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Observons que A est toujours diagonalisable. En effet, son polynôme caractéristique vaut

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+c)\lambda + \left(ac - b^2\right).$$

Ce dernier a pour discriminant

$$\Delta = (a+c)^2 - 4\left(ac - b^2\right) = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0.$$

Ainsi, A admet toujours au moins une valeur propre réelle. Distinguons deux cas.

- ✗ Si $\Delta = (a-c)^2 + 4b^2 = 0$. Ceci signifie que $a = c$ et $b = 0$, et donc que A est en fait la matrice aI_2 qui est déjà diagonale, on peut évidemment l'écrire comme $A = I_2 \cdot A \cdot I_2^{-1}$.

- ✗ Si $\Delta > 0$. Dans ce cas, χ_A possède deux racines distinctes et donc A admet deux valeurs propres distinctes. Elle est donc diagonalisable.
  Les deux sous-espaces propres sont de dimension 1. Il suffit de normaliser un vecteur propre (non nul donc) associé à chaque valeur propre. Par le résultat qui précède, la famille obtenue par concaténation des deux vecteurs normalisés est orthogonale (et libre) et forme donc une base orthonormale de vecteurs propres de A.

2. Pour trouver un contre-exemple (c'est à dire une matrice symétrique à coefficients complexes qui ne soit pas diagonalisable, il faut en trouver une qui n'ait qu'une seule valeur propre et qui ne soit pas déjà diagonale. Par exemple

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

est bien symétrique, a pour unique valeur propre 0 et n'est donc pas diagonalisable.

□

Exercice 8.19.

Soit $n \geq 2$ un entier fixé. On considère la matrice $M_n = (m_{i,j}^{(n)})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$m_{i,j}^{(n)} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j+1 \\ \frac{1}{n}, & \text{si } j = n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

1. On note χ_n le polynôme caractéristique de M_n. Montrer que : $\chi_n(X) = X^n - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X^k$.

2. Montrer que toutes les racines complexes de χ_n sont dans le disque unité fermé.

3. On pose $P_n(X) = (X-1)\chi_n(X)$. Montrer que P_n admet une racine double et que toutes les autres sont simples.

4. M_n est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Solution.

1. On développe selon la dernière colonne principalement constituée du coefficient $-1/n$ et (en bas à droite) du coeff. $X - 1/n$, en remontant de bas en haut. Notant

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & X & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

le déterminant constitué de $n-1-k$ termes X et k termes -1 sur la diagonale, on a

$$\chi_n(X) = \left(X - \frac{1}{n}\right) X^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \left(-\frac{1}{n}\right) \Delta_i = X^n - \frac{1}{n} X^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \left(-\frac{1}{n}\right) (-1)^i X^{n-1-i} = X^n - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X^k.$$

2. Raisonnons par l'absurde. Si z est racine de χ_n et que $|z| > 1$, alors $|z|^k < |z|^n$ et il suit que

$$|z|^n = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} z^k \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |z|^k < \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |z|^n = |z|^n,$$

ce qui est absurde. Toutes les racines sont donc dans le disque unité fermé.

3. En développant, on obtient $P_n(X) = X^{n+1} - \frac{n+1}{n} X^n + \frac{1}{n}$ donc 1 est racine évidente. De plus, $P_n'(X) = (n+1)X^{n-1}(X-1)$ a pour racine 1 de multiplicité 1 et 0 de multiplicité $n-1$. Il suit que 1 est racine double de P_n. Comme 0 n'est pas racine de P_n, aucune racine de P_n différente de 1 n'est racine de P_n' et les racines de P_n différentes de 1 sont toutes simples.

4. Il suit de la question précédente que $P_n(X) = (X-1)^2 Q_n(X)$ avec Q_n n'ayant que des racines simples toutes différentes de 1. Il est clair que $\chi_n(X) = (X-1)Q_n(X)$ est alors (scindé) à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$ et donc M_n est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Pour $n = 2$ elle l'est aussi dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (ses deux valeurs propres sont 1 et $-1/2$). Par contre pour $n > 2$, on a au plus deux valeurs propres réelles. En effet, si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ étaient trois valeurs propres (distinctes donc) de M_n - qui sont aussi des racines de Q_n - (on peut supposer $-1 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 = 1$), alors $\lambda_2 \leq 0$ (sinon, par Rolle, Q_n' aurait une racine entre 0 et 1 strictement et ce n'est pas le cas). Toujours par Rolle, Q_n' aurait une racine strictement négative entre λ_1 et λ_2 et ce n'est pas le cas non plus. M_n n'est donc pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si $n > 2$.

□

Annales de l'oral

Exercice 8.20. — Oral Math II 2025

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u, v deux endomorphismes de E.

1. Montrer que toute valeur propre non nulle de $u \circ v$ est valeur propre de $v \circ u$.

2. Montrer si E est de dimension finie, alors toute valeur propre de $u \circ v$ est aussi valeur propre de $v \circ u$.

3. On définit les endomorphismes u et v de $\mathbb{R}[X]$ par $u(P) = X'P$ et $v(P) = P'$.

a. Montrer que 0 est valeur propre de $u \circ v$.
b. La valeur 0 est-elle valeur propre de $v \circ u$? Qu'en conclure?

Solution.

1. Soit λ une valeur propre non nulle de $u \circ v$ et $x \neq 0$ un vecteur propre associé à λ. Alors $y = v(x) \neq 0$, sinon $(u \circ v)(x) = u(0) = 0 = \lambda x$, alors que x et λ ne sont pas nuls. En composant l'égalité $(u \circ v)(x) = \lambda x$ par v, on obtient

$$(v \circ u)(y) = \lambda y \quad \text{avec} \quad y = u(x) \neq 0,$$

ce qui signifie que λ est aussi valeur propre de $v \circ u$.

2. D'après ce qui précède toute valeur propre non nulle de $u \circ v$ est aussi valeur propre de $v \circ u$.
Si maintenant zéro est valeur propre de $u \circ v$, alors $g \circ f$ n'est pas bijectif, donc son déterminant est nul (on peut utiliser le déterminant car E est de dimension finie). Ainsi :

$$\det(v \circ u) = \det(v) \times \det(u) = \det(u) \times \det(v) = \det(u \circ v) = 0$$

donc $v \circ u$ n'est pas bijectif, ce qui signifie que zéro est valeur propre de $v \circ u$.

3. **a**. Comme $u \circ v : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{XP}'$, zéro est valeur propre car $g(1) = 0$.
b. Comme $v \circ u : \mathrm{P} \mapsto (\mathrm{XP})'$, $v \circ u$ qui est injectif. En effet, si $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est tel que $v \circ u(\mathrm{P}) = (\mathrm{XP})' = 0$, alors XP est un polynôme constant, ce qui pour une raison de degré impose $P = 0$.
La propriété de la question 2, ne s'étend pas aux espaces de dimension infinie (ce qui est le cas pour $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$).

□

Exercice 8.21. **Oral Math II 2017**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par $M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0\cdots 0 & 1 \end{array}\right)$.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(A) \cup \{1\}$.

2. Soit $X \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$ et $Y = \begin{pmatrix} X \\ t \end{pmatrix}$. Calculer MY.

3. Dans la suite de l'exercice, on suppose $1 \notin \mathrm{Sp}(A)$.
a. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Déterminer $E_\lambda(M)$ en fonction de $E_\lambda(A)$.
b. Expliciter $E_1(M)$ et préciser sa dimension.

4. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A l'est.

Solution.

1. On a
$$\det(XI_{n+1} - M) = \det\left(\begin{array}{c|c} XI_n - A & C \\ \hline 0\cdots 0 & X-1 \end{array}\right) = \det(XI_n - A) \times (X-1)$$
en développant par rapport à la dernière ligne, d'où le résultat.

2. On trouve
$$MY = \begin{pmatrix} AX + tC \\ t \end{pmatrix}.$$

3. **a**. On a
$$MY = \lambda Y \iff M\begin{pmatrix} X \\ t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X \\ t \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} AX + tC \\ t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X \\ t \end{pmatrix}.$$
Puisque $\lambda \neq 1$ on déduit déjà $t = 0$ de la dernière équation, puis la première donne $AX = \lambda X$ soit $X \in E_\lambda(A)$.Donc
$$E_\lambda(M) = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} \ ; \ X \in E_\lambda(A) \right\}.$$
En particulier on a $\dim E_\lambda(M) = \dim E_\lambda(A)$.

b. On raisonne comme ci-dessus:
$$\begin{aligned} MY = Y &\iff M\begin{pmatrix} X \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ t \end{pmatrix} \\ &\iff AX + tC = X \iff (A - I_n)X = -tC \\ &\iff X = -t(A-I_n)^{-1}C \qquad \text{car } 1 \notin \mathrm{Sp}(A) \\ &\iff \begin{pmatrix} X \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -(A-I_n)^{-1}C \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
Cela prouve $E_1(M) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -(A-I_n)^{-1}C \\ 1 \end{pmatrix}$ c'est donc un sous-espace de dimension 1.

4. M diagonalisable si et seulement si $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} \dim E_\lambda(M) = n+1$. Mais on en déduit des questions précédentes:
$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} \dim E_\lambda(M) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)\setminus\{1\}} \dim E_\lambda(M) + \dim E_1(M) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A) + 1.$$
D'où :
$$\begin{aligned} M \text{ diagonalisable} &\iff \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} \dim E_\lambda(M) = n+1 \\ &\iff \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A) = n \\ &\iff A \text{ diagonalisable} \end{aligned}$$

□

Exercice 8.22. **Oral Mines-Télécom 2023**

Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ canoniquement associé à M.

1. Montrer qu'il existe une seule droite vectorielle stable par f.

2. Montrer que le plan d'équation $ax+by+cz=0$ est stable par f si et seulement si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est vecteur propre de M^T.

3. Donner tous les plans vectoriels stables par f.

Solution.

1. $D = \text{Vect}(u)$ est stable par f si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(u) = \lambda u$ c'est à dire si et seulement u est vecteur propre de f. On calcule alors le polynôme caractéristique de f.

$$\chi_f(x) = \begin{vmatrix} x-3 & -1 & -2 \\ -1 & x-1 & 0 \\ 1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-2)\left(x^2-4x+2\right)\cdot 2(2-x) = (x-2)\left(x^2-4x+4\right) = (x-2)^3.$$

Donc $\text{Sp}(f) = \{2\}$ et on trouve (après une résolution de système) que

$$E_2(f) = \text{Vect}((1,1,-1))$$

est l'unique droite vectorielle stable par f.

2. Soit $\mathscr{P} : ax+by+cz=0$. On note $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = M^\top \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\mathscr{P}' : a'x+b'y+c'z=0$.

Alors,

$$\begin{aligned}
\mathscr{P} \text{ est stable par } f &\iff \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Longrightarrow M\begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) \\
&\iff \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \perp M^\top \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) \\
&\iff \mathscr{P} \subset \mathscr{P}' \iff \mathscr{P} = \mathscr{P}' \qquad \text{car mêmes dimensions} \\
&\iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } M^\top \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ colinéaires} \\
&\iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ vecteur propre de } M^\top
\end{aligned}$$

3. D'après **1.**, $\text{Sp}(M^\top) = \text{Sp}(M) = \{2\}$ et $E_2(M^\top) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Donc, $\mathscr{P} : y+z=0$ est le seul plan vectoriel stable par f.

□

Exercice 8.23. **Oral Math II 2024**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a, b des réels fixés non nuls et $M_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 0 & b \\ a & \cdots & a & 0 \end{pmatrix}$, de taille $(n+1)\times(n+1)$.

On note χ_n le polynôme caractéristique de M_n.

1. Déterminer le rang de M_n. Que peut-on dire de son spectre ?

2. Dans cette question seulement, on suppose $a = b$. Que peut-on dire concernant la diagonalisation de M_n?

3. **a.** En utilisant le résultat de la Question **1.**, montrer que χ_n est divisible par X^{n-1}.

b. Calculer $\chi_2(x)$.

c. Montrer que $\chi_{n+1} = X\cdot\chi_n - abX^n$.

d. Exprimer χ_n en fonction de a, b et n.

e. Conclure que si $ab > 0$, alors M_n est diagonalisable.

Solution.

1. Les deux dernières colonnes de M_n sont clairement non colinéaires. Par contre les n premières sont les mêmes. Il suit que $\text{rg}(M_n) = 2$. Il suit que $\dim(\text{Ker}(M_n)) = n-1$. On a donc $0 \in \text{Sp}(M_n)$ et $m(0) \geq n-1$. Comme la trace est nulle, il est possible que M_n admette deux autres valeurs propres opposées.

2. Si $a = b$ la matrice est symétrique donc diagonalisable d'après le théorème spectral qui sera énoncé... plus tard (voir **Chapitre 13**).

3. **a**. Comme 0 est de multiplicité $n-1$, X^{n-1} divise χ_n.

b. Pour $n = 2$, on a

$$\chi_2(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & -b \\ 0 & X & -b \\ -a & -a & X \end{vmatrix} = X(X^2 - ab) - abX = X(X^2 - 2ab).$$

c. On développe par rapport à la première colonne. Puis on développe le second déterminant du membre de droite par rapport à la première ligne.

$$\chi_{n+1}(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & -b \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & X & -b \\ -a & \cdots & & -a & X \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} X & \cdots & 0 & -b \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & -b \\ -a & \cdots & -a & X \end{vmatrix} + (-1)^n a \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & -b \\ X & & & \vdots \\ & \ddots & & \vdots \\ & & X & -b \end{vmatrix}$$

$$= X\chi_n(X) + (-1)^n a(-1)^{n+1} b \begin{vmatrix} X & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & X & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & X \end{vmatrix} = X\chi_n(X) - abX^n.$$

d. On commence par calculer

$$\chi_1(X) = \begin{vmatrix} X & -b \\ -a & X \end{vmatrix} = X^2 - ab.$$

On peut alors émettre la conjecture suivante (qu'on démontre ensuite par récurrence):

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \chi_n(X) = X^{n-1}(X^2 - nab).$$

Cette formule est naturellement vraie pour $n = 1$ et $n = 2$ (c'est en se basant sur ces deux valeurs qu'on a émis la conjecture). Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'elle soit vraie pour n. Alors

$$\chi_{n+1}(X) = X\chi_n(X) - abX^n = XX^{n-1}(X^2 - nab) - abX^n = X^n(X^2 - nab - ab) = X^n(X^2 - (n+1)ab),$$

et la formule est à nouveau vraie pour $n+1$.

e. Si $ab > 0$, alors χ_n admet pour racines 0 (de multiplicité $n-1$) ainsi que $\sqrt{ab}$ et $-\sqrt{ab}$ toutes deux de multiplicité 1. Il suit que M_n est bien diagonalisable.

□