



2026

Cahier de vacances



1 Une remise en route

Ce (chouette) cahier de vacances a pour but d'aider à la remise au travail après les congés d'été mérités et afin de reprendre le travail du bon pied, en évitant de courir après la montre ou d'avoir la tête sous l'eau une bonne partie de l'année scolaire de seconde année qui passe trèèèèè vite.

On a donc sélectionné quelques courtes questions ou exercices brassant une bonne partie du programme de première année, avec des difficultés variables. On n'aura pas non plus la naïveté de croire que leur maîtrise "suffit". Cela dit, il serait plus que pénalisant de débiter l'année sans que ce soit le cas.

On ne peut pas débiter l'année sans savoir résoudre parfaitement et rapidement un système par pivot de Gauss par exemple...

On a aussi inclus l'ensemble des sujets posés (et même ceux pas posés) à l'oral le 18 Juin lors de la journée d'oraux de préparation au passage en **PT**. Une solution de ces exercices sera transmise à la rentrée.

Naturellement, il est indispensable de connaître parfaitement les différentes définitions, formules et résultats du cours. La résolution de ce cahier peut aussi permettre de pointer ce qu'il est nécessaire de reprendre.

Il n'y aura pas de solution des questions courtes de cette planche mise en ligne. La semaine de rentrée (du 1er au 5 Septembre) sera consacrée à des révisions qui pourront piocher dans ce cahier (mais pas que), tout comme le premier programme de kholles.

À bon entendeur...

2 45 Questions courtes

Les questions de cette section sont naturellement indépendantes.

1. Résoudre les systèmes suivants

$$(i) \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x + y + 2z = 11 \end{cases}, \quad (ii) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3 \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

2. Résoudre les équations $AX = 0$, $AX = X$ et $AX = 3X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ où, A est la matrice ci-dessous. On présentera les solutions sous forme de *sous-espace vectoriel (de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) engendré* par une famille (finie) de vecteurs.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. On pose $z = \frac{1 + \sqrt{2} + i}{1 + \sqrt{2} - i}$. Calculer $|z|$. Mettre z sous forme algébrique. Calculer z^{2026} .

4. Pour chacune des deux questions (indépendantes) suivantes, proposer une résolution par le calcul puis une autre résolution géométrique.

- Déterminer les valeurs de z pour lesquelles z , $\frac{1}{z}$ et $1 - z$ ont même module.
- Trouver tous les nombres complexes z vérifiant $|z| = |z - 4|$ et $\arg(z) = \arg(z + 1 + i)$.

5. Calculer $\sum_{k=1}^n k(2k^2 - 1)$. On vérifiera le résultat obtenu par récurrence.

6. Calculer les sommes doubles suivantes

$$(i) \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j), \quad (ii) \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j}, \quad (iii) \sum_{1 \leq i, j \leq n} \ln(i^j).$$

7. Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$,

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

8. Montrer, par la méthode de votre choix, que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \geq p + 1$, $\sum_{k=p}^{n-1} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n-1}{p}$.

9. Déterminer les puissances A^n ($n \in \mathbb{N}^*$) de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

10. Calculer les valeurs suivantes

$$(i) \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \quad (ii) \frac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}, \quad (iii) \arccos\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right), \quad (iv) \operatorname{ch}\left(\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right).$$

11. Montrer que, pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

12. Résoudre l'équation $1 + \sin(x) - \cos(x) = 0$.

13. Résoudre sur \mathbb{R} , puis sur l'intervalle $[0; 2\pi]$, l'équation $\cos(x) + \cos(3x) = 0$.

14. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ puis $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ dans le cas où $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$.

15. Linéariser $\cos^4(x)$.

16. Déterminer les racines cubiques de $-8i$.
17. Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de $X^4 - 1$ par $X - 1$.
18. Factoriser $X^5 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.
19. Calculer $\int_0^1 \frac{t^4 + t - 1}{t^2 + 1} dt$.

20. Montrer la convergence et calculer la somme des séries ci-dessous

$$(i) \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)^2 (-2)^{n+2}}{5^n}, \quad (ii) \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{\sqrt{n+3}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right), \quad (iii) \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^k \times k!},$$

$$(iv) \sum_{k \geq 4} \frac{1}{(1-i\sqrt{2})^k}, \quad (v) \sum_{k \geq 0} \arctan \left(\frac{(k+2) - (k+1)}{1 + (k+2)(k+1)} \right).$$

21. Montrer, à l'aide de considérations géométriques, que, pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,
- $$0 < \sin(x) \leq x \leq \tan(x).$$

En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ puis que la fonction \cos est dérivable sur \mathbb{R} et vérifie $\cos' = -\sin$.

22. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\sin(x) + 2 \ln(1+x)$.
 Déterminer le développement limite à l'ordre 3 en 0 de e^{ix} .

23. On introduit alors les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right).$$

- a. À l'aide de la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0, montrer que : $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$.
- b. En déduire la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ puis celle de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ vers une limite $\ell > 0$.

24. On considère, pour tout entier $n \geq 2$, la fonction h_n définie sur \mathbb{R} par :

$$h_n(t) = \begin{cases} n^2 t, & \text{si } 0 < t \leq \frac{1}{n} \\ n^2 \left(\frac{2}{n} - t \right), & \text{si } \frac{1}{n} < t \leq \frac{2}{n} \\ 0, & \text{si } t \notin]0, \frac{2}{n}] \end{cases} .$$

- a. Représenter l'allure de la courbe de h_n . En déduire la valeur de $\int_0^1 h_n(t) dt$.
- b. Soit $t \in [0, 1]$ fixé. Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(t)$?
- c. Vérifier alors que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 h_n(t) dt \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(t) dt.$$

25. Soit $x \in [0; 1[$ fixé.

- a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

- b. À l'aide d'un encadrement, montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0.$$

- c. Conclure que la série $\sum_{p \geq 1} \frac{x^p}{p}$ converge et préciser sa somme.

26. Calculer $\int_0^\pi x \cos(x) e^x dx$.

27. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = (u_n^2 + 1)/2$ est croissante, majorée par 1 et donc convergente vers une limite à préciser.

28. Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

$$(i) \begin{cases} y' &= 3y + 5 \\ y(0) &= 1 \end{cases}, \quad (ii) \begin{cases} y'' - 2y' + y &= 0 \\ y(0) &= 2 \\ y'(0) &= 1 \end{cases}, \quad (iii) \begin{cases} y'' + y' + y &= 0 \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= -1 \end{cases}.$$

29. Écrire une fonction en langage `Python`, prenant en argument un entier n , permettant de calculer le terme u_n où la suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 2, \quad \text{et} \quad u_{n+2} = \frac{7}{2}u_{n+1} - \frac{3}{2}u_n.$$

Déterminer ensuite l'expression, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de u_n .

30. Déterminer l'ensemble des paramètres $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\begin{pmatrix} i & 3 \\ -2i & 5i \end{pmatrix} - \lambda I_2$ ne soit pas inversible.

31. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ une racine cubique de l'unité et on considère x, y, z trois réels. Calculer les déterminants :

$$(i) \det \begin{pmatrix} 1 & -j & j \\ j & -j^2 & 1 \\ -j^2 & 1 & j^2 \end{pmatrix}, \quad (ii) \det \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}, \quad (iii) \det \begin{pmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+1 & x+2 & x+3 \\ x+2 & x+3 & x+4 \end{pmatrix}$$

32. Écrire la matrice de l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ puis, après avoir justifié qu'il s'agissait bien d'une base, celle dans la base $\mathcal{F} = (-e_1, e_1 - e_2, -e_1 + e_2 + 4e_3)$, où

$$f(x, y, z) = (x + 2y - z, -y + z, 3z).$$

33. **Sans aucun calcul**, déterminer le rang de la matrice ci-dessous. En déduire, toujours sans calcul, une base de son noyau.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

34. Soit u un endomorphisme de \mathbb{R}^n tel que $u \circ u = \text{Id}$. Montrer, par analyse-synthèse, que

$$\mathbb{R}^n = \text{Ker}(u - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(u + \text{Id}).$$

35. Montrer que, si C et D sont deux événements d'un même espace probabilisé, alors

$$\mathbf{P}(C \cup D) \leq \mathbf{P}(C) + \mathbf{P}(D).$$

En déduire que, si (A_j) est une suite d'événements du même espace, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i) \geq \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right).$$

36. On effectue des tirages **sans remise** d'une boule dans une urne contenant $N - 1$ boules blanches et une boule noire. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le rang d'apparition de la boule noire. Montrer soigneusement que $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1; N \rrbracket)$.

37. Soit X une v.a. finie telle que $X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$. Montrer que

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{P}(X > j).$$

38. Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. On note A l'événement " X prend une valeur paire" et $a = \mathbf{P}(A)$.

a. On introduit $Y = (-1)^X$. Quelle est la loi de Y ? Expliciter son espérance en fonction de a .

b. Calculer, à l'aide du théorème de transfert, l'espérance de Y en fonction de n et de p . En déduire la valeur de a .

39. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de n urnes. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'urne k contient des boules, indiscernables au toucher, numérotées de 1 à k . On choisit une urne au hasard et on pioche une boule dans cette urne.

On note X la v.a. qui prend la valeur de l'urne dans laquelle et on pioche et Y celle qui prend la valeur de la boule piochée.

Déterminer la loi conjointe de (X, Y) . En déduire la loi marginale de Y puis l'espérance de Y .

40. On se place dans un repère orthonormal du plan. Pour tout réel a , on définit la droite D_a d'équation

$$D_a : (1 - a^2)x + 2ay + (a^2 - 2a - 3) = 0.$$

Déterminer tous les points par lesquels passe au moins une droite de la famille $(D_a)_{a \in \mathbb{R}}$.

Déterminer tous les points par lesquels passent deux droites perpendiculaires de la famille.

41. Soit \mathcal{C} le cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$, et $A(4; 4)$.

On peut mener par le point A deux tangentes au cercle \mathcal{C} .

Calculer la distance entre les points d'intersection de ces tangentes et de \mathcal{C} .

42. Démontrer à l'aide d'un calcul de produit scalaire que les hauteurs d'un triangle non aplati sont concourantes.

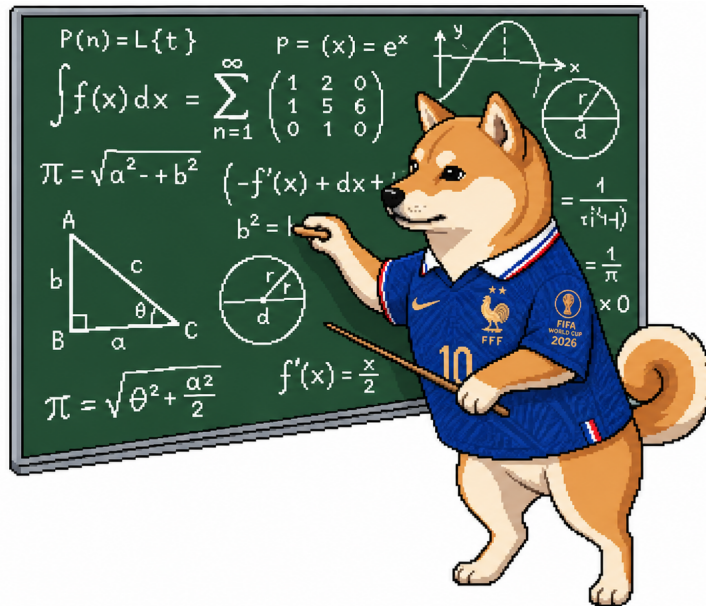
43. Soient \mathcal{P} et \mathcal{Q} les deux plans d'équations respectives $3x - 4y + 1 = 0$ et $2x - 3y + 6z - 1 = 0$.

Déterminer tous les points équidistants des plans \mathcal{P} et \mathcal{Q} .

44. Prouver la formule du double produit vectoriel : $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$.

En déduire l'identité $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} + (\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u} + (\vec{w} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

45. Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs fixés. Déterminer tous les vecteurs \vec{x} tels que $\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{v}$.



Sujet n°1

Question de cours

Définition d'un endomorphisme. Définition du noyau et de l'image. Théorème du rang.

Exercice principal

On considère les matrices carrées d'ordre trois suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on note respectivement f (resp. φ) les endomorphismes de \mathbb{R}^3 représentés dans la base canonique par A (resp. B).

- Déterminer trois vecteurs u, v et w de \mathbb{R}^3 tels que :
 - ✗ u forme une base de $\text{Ker}(f)$;
 - ✗ $f(v) = -v$;
 - ✗ $\text{Ker}(f - \text{id}) = \text{Vect}(w)$
- Vérifier que (u, v, w) forme une base de \mathbb{R}^3 . Former la matrice P de passage de la base canonique vers cette nouvelle base.
- Déterminer P^{-1} .
- Vérifier que $P^{-1}AP = D$. Est-ce surprenant? Expliquer.
- Montrer que la matrice de φ dans la base (u, v, w) est encore une matrice diagonale, que l'on notera C . Expliciter un lien entre C et B .

Exercice complémentaire

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n x^{-2} \exp\left(\frac{1}{x}\right) dx$.

Sujet n°2

Question de cours

Définition d'un endomorphisme, noyau et image d'un endomorphisme, caractérisation de l'injectivité avec le noyau.

Exercice principal

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de \mathbb{R}^3 . Soit f l'application linéaire définie par

$$f(e_1) = f(e_3) = e_3, \quad f(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3.$$

- a. Déterminer le rang puis le noyau de f . f est-elle injective ?
 - b. Écrire la matrice de f dans la base \mathcal{B} . On la note A .
- On pose $\varepsilon_1 = e_1 - e_3$, $\varepsilon_2 = e_1 - e_2$ et $\varepsilon_3 = -e_1 + e_2 + e_3$.
 - a. Calculer e_1, e_2, e_3 en fonction de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est-elle une base de \mathbb{R}^3 ?
 - b. Écrire la matrice de f dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. On la note B .
- On note

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1} .
- b. Calculer PBP^{-1} .

Exercice complémentaire

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$.

Sujet n°3

Question de cours

Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Exercice principal

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx.$$

1. Calculer I_0 .
2. a. Établir que la suite (I_n) est décroissante et minorée.
b. En déduire que la suite (I_n) est convergente.
3. a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
b. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
4. a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$.
b. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$.

Exercice complémentaire

Soit $n \geq 3$ un entier. On considère une expérience aléatoire où n personnes jettent (indépendamment les unes des autres) chacune une pièce équilibrée. On dit qu'une personne gagne si elle a obtenu le contraire de **toutes** les autres.

Quelle est la probabilité qu'une partie donnée ait un gagnant ?

Sujet n°4

Question de cours

Définition de racine (multiple) d'un polynôme. Caractérisation en termes de divisibilité. Que dire du nombre de racines (complexes) d'un polynôme ?

Exercice principal

Soit un entier $q \geq 2$. On pose $Q(X) = qX^q - \sum_{k=0}^{q-1} X^k \in \mathbb{C}[X]$ et $R = (X-1)Q$.

1. Montrer que 1 est racine de Q .
2. Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ est racine de Q alors $q|z|^q \leq \sum_{k=0}^{q-1} |z|^k$ puis, par l'absurde, que $|z| \leq 1$.
3. Montrer que $R(X) = qX^{q+1} - (q+1)X^q + 1$.
4. Montrer que 1 est racine double de R et que les autres racines de R sont simples.
5. En déduire que Q n'admet que des racines simples.

Exercice complémentaire

Déterminer la primitive F sur \mathbb{R} de la fonction f telle que $F(0) = \ln(2)$ avec

$$f(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}.$$

Sujet n°5

Question de cours

Énoncés de la formule des probabilités totales et de la formule des probabilités composées.

Exercice principal

- Dans l'un de ses sacs de golf, Anna a rangé trois clubs de golf dont un *putter*. Elle tire au hasard et sans remise un club de golf de son sac jusqu'à ce qu'elle obtienne son *putter*. On note X la variable aléatoire égale au numéro du tirage où le *putter* a été tiré et pour i entier supérieur ou égal à 1, on note C_i l'événement «Le *putter* a été tiré lors du i -ème tirage».
 - Déterminer et reconnaître la loi de X .
 - En déduire l'espérance et la variance de X .
- Pour jouer, Anna a également à sa disposition un seau de balles de golf contenant 44 balles blanches et 4 balles jaunes. Au début de chaque trou, Anna tire au hasard une balle dans le seau, note sa couleur, joue le trou puis la remet dans le seau. Un parcours de golf comprend 18 trous. Soit J la variable aléatoire égale au nombre de balles jaunes utilisées lors de deux parcours.
 - Reconnaitre la loi de J . Préciser $J(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par J ainsi que la probabilité $\mathbf{P}(J = k)$ pour tout k de $J(\Omega)$.
 - En moyenne, avec combien de balles jaunes, Anna a-t-elle joué lors des deux parcours?

Exercice complémentaire

Résoudre l'équation différentielle $y' - \frac{1 + \sqrt{x}}{2x}y = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} + 1}$.

Sujet n°6

Question de cours

Énoncé du théorème des accroissements finis puis de l'inégalité des accroissements finis.

Exercice principal

On pose $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \cos(u_n)$.

- Montrer que l'équation $\cos(x) = x$ admet une unique solution α , et que $\alpha \in [0, 1]$.
- Démontrer que : $\forall (a, b) \in [0, 1]^2, |\cos(b) - \cos(a)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}|b - a|$.
- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$. Montrer ensuite que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$. En déduire la limite de u_n .
- Écrire une fonction Python d'argument k qui retourne une valeur approchée de α à 10^{-k} près.

Sujet n°7**Question de cours**

Définition, variations, allure et propriétés des fonctions $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$, $x \mapsto \operatorname{sh}(x)$.

Exercice principal

On considère les fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \arctan\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{1 + \operatorname{ch}(x)}\right) \quad \text{et} \quad \varphi : x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x)}{1 + \operatorname{ch}(x)}.$$

1. Déterminer \mathcal{D} le domaine de définition de φ .
2. Préciser la parité de φ .
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}$, $\varphi'(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(x)}$.
5. En déduire le tableau de variation complet de φ .
6. Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R} et montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{2 \operatorname{ch}(x)}$$

7. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} \arctan(\operatorname{sh}(x))$.

Exercice complémentaire

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ (en distinguant éventuellement les cas), la valeur de $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$.

3 Bonnes vacances

©Bill Watterson, Calvin & Hobbes

Si le délai de réponse est naturellement rallongé pendant la période estivale, la communication reste maintenue et on invite néanmoins à lister les difficultés rencontrées clairement formulées et à prendre contact par courriel (frederic@gaunard.com) afin de ne pas rester *bloqué.e* trop longtemps. En particulier, les échanges peuvent être réguliers lors de la deuxième quinzaine du mois d’Août. (Il est par ailleurs capital de s’y *remettre* (bien) avant la rentrée, pour une reprise sous les meilleures auspices.)

Bonnes et belles vacances à tou.te.s!